

MÉMOIRE D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES
UNIVERSITÉ LILLE 1
LABORATOIRE PAUL PAINLEVÉ

Arnaud Bodin

Quelques contributions à la topologie et à l'arithmétique des polynômes

Présentée le 7 juillet 2008 devant le jury composé de :

Shreeram S. Abhyankar, université de Purdue (*rapporteur*)

Enrique Artal-Bartolo, université de Zaragoza (*rapporteur*)

Pierrette Cassou-Noguès, université de Bordeaux I

Pierre Dèbes, université de Lille I

Françoise Michel, université de Toulouse III

Mutsuo Oka, université de Tokyo (*rapporteur*)

Mihai Tibar, université de Lille I

Arnaud Bodin

**Quelques contributions à la topologie et à
l'arithmétique des polynômes**

Remerciements

C'est avec plaisir que je remercie les personnes qui m'ont fait partagé leur goût pour les mathématiques. En premier lieu je pense à Françoise Michel qui m'a initié avec enthousiasme au monde de la recherche.

Les collaborations m'ont beaucoup appris tant mathématiquement que humainement : je remercie Anne Pichon, José Seade, Mihai Tibar pour nos travaux sur la topologie des singularités ; Pierre Dèbes et Salah Najib m'ont fait découvrir tout un pan arithmétique des mathématiques, je leur en suis très reconnaissant.

J'exprime mes remerciements à Pierrette Cassou-Noguès pour l'intérêt constant qu'elle a porté à mon travail. Ma gratitude va à Enrique Artal qui m'a donné l'occasion de visiter l'université de Zaragoza pendant deux mois et qui a eu la gentillesse d'accepter d'être rapporteur. Shreeram S. Abhyankar et Mustsuo Oka m'ont fait l'honneur de rapporter sur cette thèse et de venir jusqu'à Lille, je les en remercie vivement.

Enfin toute mon affection va à Stéphanie, Valentine et Charlotte qui ont rendu ces années de travail légères et heureuses.

Sommaire

Introduction	1
1 Déformation des polynômes : point de vue topologique	5
2 Fonctions méromorphes	11
3 Points entiers sur les courbes algébriques	23
4 Déformation des polynômes : point de vue arithmétique	29
Bibliographie	37

Introduction

LES POLYNÔMES de plusieurs variables sont présents sous de nombreuses formes en géométrie. L'exemple qui vient immédiatement à l'esprit est celui d'une courbe algébrique, définie comme le lieu des points qui annulent un polynôme : $\mathcal{C} = (P(x, y) = 0)$, où plus généralement des hypersurfaces algébriques. Dans ce mémoire le point de vue est différent : on ne privilégie pas une valeur (0 dans l'exemple précédent) mais on regarde le comportement global. Si l'on prend un polynôme $P(x_1, \dots, x_n)$ défini sur le corps K , on s'intéresse à la famille $(P(x_1, \dots, x_n) = c)$ pour toutes les valeurs possibles de $c \in K$. Une autre façon de voir est de considérer le polynôme P comme une application polynomiale : $P : K^n \longrightarrow K$.

La généralisation suivante vient alors naturellement : au lieu de considérer la famille de polynômes $(P(x_1, \dots, x_n) - c = 0)_{c \in K}$, nous fixons deux polynômes $P(x_1, \dots, x_n)$, $Q(x_1, \dots, x_n)$ et c'est alors la famille de polynômes $(P(x_1, \dots, x_n) - cQ(x_1, \dots, x_n) = 0)_{c \in K}$ qui est l'objet de notre étude.

Les domaines étudiés ici concernent en particulier :

- Les singularités des polynômes. Comme le point de vue global nous devons tenir compte des singularités dites “locales” des hypersurfaces, mais aussi des singularités “à l'infini” propres à cette vision globale.
- L'arithmétique des polynôme. Avec d'une part une étude des points entiers sur les courbes algébriques et d'autre part des considérations sur l'irréductibilité des polynômes, toujours en ayant ce point de vue global à l'esprit.

Présentons les thèmes plus en détails. Pour un polynôme $P(x_1, \dots, x_n)$ défini sur le corps \mathbb{C} des nombres complexes, les travaux de R. Thom donnent l'existence d'un ensemble fini $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}$ tel que l'on ait une fibra-

tion C^∞ localement triviale :

$$P : \mathbb{C}^n \setminus P^{-1}(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \mathcal{B}.$$

L'ensemble de bifurcation \mathcal{B} contient bien sûr l'ensemble \mathcal{B}_{aff} des valeurs critiques de P (ce sont les images par P des points de \mathbb{C}^n où le gradient de P est nul). Mais il peut y avoir d'autres valeurs, qui proviennent du comportement asymptotique de P , ce sont les *valeurs irrégulières à l'infini*, notées \mathcal{B}_∞ . L'objet du premier chapitre est de déterminer des conditions sur les ensembles \mathcal{B} , \mathcal{B}_{aff} , \mathcal{B}_∞ afin que lorsque l'on regarde une déformation d'un polynôme celle-ci soit (topologiquement) triviale.

Lorsque l'on localise un polynôme en une singularité à l'infini, on regarde en fait localement une fraction rationnelle assez particulière. Cela nous conduit au deuxième chapitre où nous étudions les fractions rationnelles, ou des fonctions méromorphes, dans un voisinage de l'origine de \mathbb{C}^n . La situation est "faussement locale" car toutes les fibres entre en jeu. Nous établissons un théorème de fibration de Milnor et donnons une réciproque dans le cas de deux variables.

Un vieux problème consiste à regarder le nombre de points dont les coordonnées sont entières qui appartiennent à une courbe algébrique irréductible $\mathcal{C} = (P(x, y) = c)$ définie par un polynôme P à coefficients rationnels. Nous montrons le résultat suivant dans le troisième chapitre : si ce nombre de points entiers est infini et la valeur c n'est pas dans l'ensemble de bifurcation \mathcal{B} alors $P(x, y)$ est algébriquement équivalent au polynôme x ou à $x^2 - dy^2$. En particulier il existe un automorphisme algébrique qui envoie \mathcal{C} sur une droite ($x = 0$) ou sur le zéro d'une équation du type "équation de Pell" ($x^2 - dy^2 - D = 0$). Nous appliquons ce résultat pour donner des bornes asymptotiques optimales au nombre des points entiers sur ces courbes.

La contrepartie arithmétique de l'ensemble de bifurcation d'un polynôme est le *spectre*. Pour $P(x_1, \dots, x_n) \in K[x_1, \dots, x_n]$, $\text{sp}(P) = \{c \in K \mid P(x_1, \dots, x_n) - \lambda \text{ est réductible sur } K\}$. Si le polynôme P est indécomposable alors le spectre est fini. Le théorème de Stein donne une borne pour le cardinal du spectre. Dans le dernier chapitre nous définissons un spectre pour les fractions rationnelles P/Q (qui est donc l'analogue de l'ensemble de bifurcation pour une fraction rationnelle). Nous montrons alors que si la fraction est indécomposable le spectre est fini et de cardinal strictement inférieur à $\deg P^2$. Nous aurions aussi pu formuler ceci en termes de la famille $(P - cQ)_{c \in K}$, c'est ce langage que nous adoptons pour l'étude d'une déformation d'un polynôme par plusieurs monômes : pour un polynôme P donné nous caractérisons les monômes Q_i qui, pour un choix générique de (c_1, \dots, c_ℓ) , rendent le polynôme $P + c_1Q_1 + \dots + c_\ell Q_\ell$ irréductible.

Listes des travaux

En gras sont les travaux présentés ici.

- Milnor fibration and fibred links at infinity, *International Mathematics Research Notices*, 11, 1999.
- Classification of polynomials from \mathbb{C}^2 to \mathbb{C} with one critical value, *Mathematische Zeitschrift*, 42, 2002.
- **Non reality and non connectivity of complex polynomials**, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 335, 2002.
- **Invariance of Milnor numbers and topology of complex polynomials**, *Commentarii Mathematici Helvetici*, 78, 2003.
- Irregular fibers of complex polynomials in two variables, *Revista Matemática Complutense*, 17, 2004.
- Computation of Milnor numbers and critical values at infinity, *Journal of Symbolic Computation*, 38, 2004.
- **Newton polygons and families of polynomials**, *Manuscripta Mathematica*, 113, 2004.
- **Topological equivalence of complex polynomials**, avec Mihai TIBAR, *Advances in Mathematics*, 199, 2006.
- Jump of Milnor numbers, *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, 38, 2007.
- **Meromorphic functions, bifurcation sets and fibred links**, avec Anne PICHON, *Mathematical Research Letters* 14, 2007.
- **Reducibility of rational fractions in several variables**, *Israel Journal of Mathematics* 164, 2008.
- Number of irreducible polynomials in several variables over finite fields, à paraître dans *American Mathematical Monthly*.
- **Integral points on generic fibers**, soumis.
- **Irreducibility of hypersurfaces**, avec Pierre DÈBES et Salah NAJIB, à paraître dans *Communications in Algebra*.
- **Milnor fibrations of meromorphic functions**, avec Anne PICHON et José SEADE, soumis.

Chapitre 1

Déformation des polynômes : point de vue topologique

L'ORIGINE de ce travail vient du théorème “ μ -constant” de Lê-Ramanujam pour les germes de fonctions analytiques à singularités isolées. Soient $f_s : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ des germes de fonctions analytiques, dont les coefficients dépendent analytiquement de $s \in [0, 1]$. Le théorème de Lê-Ramanujam [LR] est un résultat frappant qui affirme que la conservation d'un invariant numérique (le nombre de Milnor) implique la conservation d'un invariant topologique (le type topologique du germe).

Théorème 1 (Lê-Ramanujam). *Si $n \neq 3$ et si $\mu(f_0) = \mu(f_s)$ pour tout $s \in [0, 1]$ alors $f_0^{-1}(0)$ et $f_s^{-1}(0)$ ont le même type topologique.*

Nous commençons par présenter un résultat semblable pour des familles de polynômes complexes de plusieurs variables. Ce résultat a été obtenu en deux temps, d'abord pour $n = 2$, ou $n > 3$ sans singularités à l'infini, puis avec M. Tibar nous l'avons généralisé.

Nous appliquons ceci pour répondre par la négative à deux questions :

- Est-il toujours possible, à équivalence topologique près, de trouver des équations réelles à un polynôme complexe (Lee Rudolph) ?
- Est-ce que deux polynômes topologiquement équivalents peuvent être connectés par une famille continue de polynômes topologiquement équivalents ?

Finalement sous certaines hypothèses sur le polygone de Newton, nous montrons que pour une famille (f_s) de polynômes en deux variables, les valeurs irrégulières à l'infini ont un “bon” comportement lorsque s varie.

1 Équivalence topologique dans une famille de polynômes

1.1 Quelques définitions

Deux polynômes $f, g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ sont *topologiquement équivalents* s'il existe $\Phi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ et $\Psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ deux homéomorphismes tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{C}^n \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{C}. \end{array}$$

Nous utiliserons la définition suivante pour les singularités isolées à l'infini : nous disons que le polynôme $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ a des *singularités isolées à l'infini* si $\dim \text{Sing } W \leq 0$, où

$$W = \left\{ [x] \in \mathbb{P}^{n-1} \mid \frac{\partial f_d}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f_d}{\partial x_n} = 0 \right\}$$

est un sous-ensemble algébrique de l'hyperplan à l'infini H^∞ de \mathbb{P}^n , que l'on identifiera à \mathbb{P}^{n-1} . Nous notons ici f_d la partie homogène de degré $d = \deg f$ du polynôme f . La condition $\text{Sing } W \leq 0$ est équivalente à la condition suivante : pour tout $t \in \mathbb{C}$, les singularités de $\overline{f^{-1}(t)}$ et de $\overline{f_s^{-1}(t)} \cap H^\infty$ sont (au plus) isolées.

Par exemple un polynôme de deux variables ayant toutes ses fibres réduites à des singularités à l'infini isolées.

Finalement pour $c \notin \mathcal{B}$, nous notons $\mathcal{F}_{\text{gen}} = f^{-1}(c)$ une fibre générique de f . En particulier la caractéristique d'Euler $\chi(\mathcal{F}_{\text{gen}})$ est indépendante du choix de $c \notin \mathcal{B}$.

1.2 Énoncé

Théorème 2. *Soit $(f_s)_{s \in [0,1]}$ une famille continue de polynômes complexes ayant des singularités affines isolées et des singularités à l'infini isolées. Supposons que le nombre de variables vérifie $n \neq 3$. Si les nombres $\chi(\mathcal{F}_{\text{gen}}(s))$, $\#\mathcal{B}(s)$ et $\deg f_s$ sont indépendants de $s \in [0, 1]$, alors les polynômes f_0 et f_1 sont topologiquement équivalents.*

Pour $n = 2$, ou $n > 3$ mais sans singularités à l'infini, j'ai obtenu ce résultat dans [4]. Ensuite avec M. Tibar, dans [8], nous l'avons généralisé pour obtenir le résultat comme il est présenté ici.

Exemple. Soit $f_s(x, y) = x(x^2y + sx + 1)$. Alors $\mathcal{B}_{aff}(s) = \emptyset$, $\mathcal{B}_\infty(s) = \{0\}$, donc $\#\mathcal{B}(s) = 1$, $\chi(\mathcal{F}_{gen}(s)) = 0$ et $\deg f_s = 4$. Alors, f_0 et f_1 sont topologiquement équivalents. Cela fournit un exemple de polynômes topologiquement équivalents mais pas algébriquement équivalents, voir [2].

Remarque. Il est possible de faire les calculs de ces invariants numériques à l'aide d'une librairie pour SINGULAR décrite dans [6]. Cette librairie calcule pour un polynôme donné, les ensembles \mathcal{B} , \mathcal{B}_{aff} , \mathcal{B}_∞ et les nombres μ , λ . D'autre part ce programme permet de vérifier si une famille (f_s) vérifie les hypothèses de notre théorème 2; sinon il donne les paramètres s qui posent problème.

2 Idées de la preuve

Une étape préliminaire montre que si $\deg f_s$, $\#\mathcal{B}(s)$, $\mu(s) + \lambda(s)$ (où encore $\chi(\mathcal{F}_{gen}(s))$) sont des nombres constants pour $s \in [0, 1]$ alors les cinq nombres suivants restent constants : $\deg f_s$, $\#\mathcal{B}_{aff}(s)$, $\#\mathcal{B}_\infty(s)$, $\mu(s)$, $\lambda(s)$. C'est d'ailleurs cette hypothèse qui était retenue dans [4]. Pour cela nous montrons que pour la famille (f_s) les singularités affines et à l'infini ont un "bon comportement", (le paragraphe 4 détaille certains aspects).

Il est important de comprendre qu'un bon comportement des singularités équivaut à un bon comportement des valeurs singulières. Voici un exemple d'accident comme illustration : deux points singuliers affines $p(s)$, $q(s)$ de f_s qui se rencontrent en s_0 , c'est-à-dire $p(s_0) = q(s_0)$. Comment exclure ce cas? Cet accident implique aussi un accident sur les valeurs critiques : les deux valeurs critiques $f_s(p(s))$ et $f_s(q(s))$ coïncident pour $s = s_0$ ce qui fait que $\#\mathcal{B}_{aff}(s_0) < \#\mathcal{B}_{aff}(s)$, pour $s \neq s_0$. En ayant $\#\mathcal{B}_{aff}(s)$ constant, nous obtenons une contradiction. La clé de la démonstration est un théorème de Has Bey et Lazzeri qui affirme que les valeurs critiques $f_s(p(s))$ et $f_s(q(s))$ sont bien différentes pour $s \neq s_0$. Ce sont ces types d'arguments associés à une formule de calcul de la caractéristique d'Euler d'une fibre $f^{-1}(c)$ comme somme de nombres de Milnor locaux (y compris en des points à l'infini) et à la semi-continuité des nombres de Milnor (locaux et globaux) qui prouvent le bon comportement des valeurs singulières et des points singuliers. On montre que tous les "accidents" imaginables lorsque s varie, ne se produisent pas. En particulier les accidents suivants sont exclus : une valeur critique $c(s)$ qui disparaît pour $s = s_0$; une valeur critique affine $c(s)$ qui devient une valeur critique à l'infini en $s = s_0$ (et réciproquement).

Il s'agit ensuite d'appliquer des théorèmes de type Lê-Ramanujam-Timourian à chacune des singularités locales. Pour les singularités affines nous appliquons telle quelle, la trivialisatation du théorème de Lê-Ramanujam dans sa version étendue par Timourian. Pour les singularités à

l'infini nous prouvons une telle trivialisation en adaptant la preuve de Timourian à notre situation où la fibre de Milnor-Lê d'une singularité à l'infini est elle-même singulière.

Enfin, à l'aide de champs de vecteurs nous recollons entre elles toutes ces trivialisations. Enfin pour étendre le recollement de ces trivialisations à l'espace entier il faut refaire une étude du type Lê-Ramanujam (dans sa version originale cette fois) sur une fibre générique dont le type d'homotopie est un bouquet de $\mu(s) + \lambda(s)$ sphères. C'est l'utilisation du h-cobordisme ici (et aussi pour les trivialisations locales) qui impose la condition $n \neq 3$.

3 Applications à la non-réalité et la non-connexité des polynômes complexes

3.1 Non-réalité

Pour un germe $(\mathcal{C}, 0)$ de courbe du plan complexe, il est facile et souvent très utile d'obtenir un germe de même type topologique $(f = 0, 0)$, où f a une équation réelle. Par exemple si \mathcal{C} est irréductible et a pour développement de Puiseux $(t^p, \sum_{i \in \mathcal{E}} \alpha_i t^i)$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, le germe défini par le développement de Puiseux $(t^p, \sum_{i \in \mathcal{E}'} t^i)$ admet une équation réelle. Ici $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ désigne les paires caractéristiques de Puiseux. Dans la théorie des *divides* de N. A'Campo ce phénomène a une grande importance.

Qu'en est-il dans la situation globale ? Plus précisément L. Rudolph pose la question suivante : Est-il toujours possible, à équivalence topologique près, de trouver des équations réelles à un polynôme complexe ? La réponse est négative.

Théorème 3. *Soit*

$$f_s(x, y) = xy(x - y)(y - 1)(x - sy).$$

Soit k, \bar{k} les racines de $s^2 - s + 1$. Alors il n'existe aucun polynôme g à coefficients réels tel que f_k et g soient topologiquement équivalents.

3.2 Non-connexité

On peut s'interroger sur des énoncés réciproques du théorème 2. Par exemple il est vrai que si f et g sont des polynômes topologiquement équivalents alors $\chi(\mathcal{F}_{\text{gen}}(f)) = \chi(\mathcal{F}_{\text{gen}}(g))$ et $\#B(f) = \#B(g)$. Pour le degré la situation est plus délicate, mais néanmoins on arrive à prouver certains résultats, voir [7].

L'autre réciproque que l'on peut chercher est la suivante : Est-ce que deux polynômes f_0, f_1 topologiquement équivalents peuvent être connec-

tés par une famille continue (f_s) de polynômes topologiquement équivalents ?

Encore une fois la réponse est négative.

Théorème 4. *Soit*

$$f_s(x, y) = xy(y - 1)(x + y - 1)(x - sy)$$

et notons $\{k, \bar{k}, 1/k, 1/\bar{k}\}$ les racines de $256s^4 + 448s^3 + 789s^2 + 448s + 256$. Les polynômes f_k et $f_{\bar{k}}$ sont topologiquement équivalents mais il n'existe pas de famille continue $(g_t)_{t \in [0,1]}$ telle que $g_0 = f_k$, $g_1 = f_{\bar{k}}$ et telle que g_t soit topologiquement équivalent à f_k pour tout $t \in [0, 1]$.

Si \mathcal{C} sont les racines de

$$s(s-1)(s+1)(256s^4 + 736s^3 + 825s^2 + 736s + 256)(256s^4 + 448s^3 + 789s^2 + 448s + 256).$$

alors pour $s \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}$, f_s vérifie $\chi(\mathcal{F}_{\text{gen}}(s)) = -13$, $\#\mathcal{B}_{\text{aff}} = 4$ et $\mathcal{B}_{\infty} = \emptyset$. Donc pour $s, s' \notin \mathcal{C}$, f_s et $f_{s'}$ sont topologiquement équivalents d'après le théorème 2. Par contre les polynômes f_k et $f_{\bar{k}}$ vérifient $\chi(\mathcal{F}_{\text{gen}}(s)) = -13$, mais $\#\mathcal{B}_{\text{aff}} = 3$, $\mathcal{B}_{\infty} = \emptyset$. Alors le polynôme f_k n'est pas topologiquement équivalent au polynôme f_s , $s \notin \mathcal{C}$.

4 Comportement des valeurs critiques

Nous allons donner certains résultats sur le comportement des valeurs critiques $\mathcal{B}_{\infty}(s)$ et $\mathcal{B}(s)$ pour une famille continue (f_s) , $s \in [0, 1]$ de polynômes complexes de deux variables.

En supposant que la caractéristique d'Euler de la fibre générique est constante lorsque s varie nous prouvons que les valeurs irrégulières à l'infini dépendent continûment de s et ces valeurs ne peuvent pas disparaître par accident.

Précisons ce comportement des valeurs avec quelques définitions. Une fonction multi-valuée $s \mapsto F(s)$ sera *continue* si pour tout $\sigma \in [0, 1]$ et toute valeur $c(\sigma) \in F(\sigma)$ il existe un voisinage I de σ tel que pour tout $s \in I$, il existe $c(s) \in F(s)$ proche $c(\sigma)$. La fonction multi-valuée F est *fermée*, si pour tout point $\sigma \in [0, 1]$, et toute suite $c(s) \in F(s)$, $s \neq \sigma$, tel que $c(s) \rightarrow c(\sigma) \in \mathbb{C}$ quand $s \rightarrow \sigma$, alors $c(\sigma) \in F(\sigma)$. Il est bien connu que $s \mapsto \mathcal{B}_{\text{aff}}(s)$ est une fonction multi-valuée continue (dans le cas des singularités isolées). Par contre $s \mapsto \mathcal{B}_{\text{aff}}(s)$ n'est pas toujours fermée : par exemple pour $f_s(x, y) = (x - s)(xy - 1)$, nous avons pour $s \neq 0$, $\mathcal{B}_{\text{aff}}(s) = \{0, s\}$ mais $\mathcal{B}_{\text{aff}}(0) = \emptyset$.

Sous certaines hypothèses nous prouvons que $s \mapsto \mathcal{B}_{\infty}(s)$ et $s \mapsto \mathcal{B}(s)$ sont des fonctions multi-valuées continues et fermées.

Théorème 5. Soit $(f_s)_{s \in [0,1]}$ une famille de polynômes complexes de deux variables telle que $\chi(\mathcal{F}_{\text{gen}}(s))$ soit constant et telle que f_s soit non-dégénéré au sens de Newton pour tout $s \in [0, 1]$, alors la fonction multi-valuée $s \mapsto \mathcal{B}_\infty(s)$ est continue et fermée.

Remarque. Nous savons que $\chi(\mathcal{F}_{\text{gen}}(s)) = 1 - \mu(s) - \lambda(s)$. Mais le théorème 5 n'implique pas que $\mu(s)$ et $\lambda(s)$ soient constants. Par exemple pour la famille $f_s(x, y) = x^2y^2 + sxy + x$, alors pour $s = 0$, $\mu(0) = 0$, $\lambda(0) = 2$ avec $\mathcal{B}_\infty(0) = \{0\}$ et pour $s \neq 0$, $\mu(s) = 1$, $\lambda(s) = 1$ avec $\mathcal{B}_{\text{aff}}(s) = \{0\}$ et $\mathcal{B}_\infty(s) = \{-\frac{s^2}{4}\}$.

La fonction multi-valuée $s \mapsto \mathcal{B}_{\text{aff}}(s)$ est continue mais pas nécessairement fermée même si $\chi(\mathcal{F}_{\text{gen}}(s))$ est constant par exemple ([Ti]) : pour $f_s(x, y) = x^4 - x^2y^2 + 2xy + sx^2$, alors $\chi(\mathcal{F}_{\text{gen}}(s)) = -4$. Nous avons $\mathcal{B}_{\text{aff}}(0) = \{0\}$, $\mathcal{B}_\infty(0) = \{1\}$ et pour $s \neq 0$, $\mathcal{B}_{\text{aff}} = \{0, 1 - \frac{s^2}{4}\}$, $\mathcal{B}_\infty(s) = \{1\}$. Remarquons que même si $s \mapsto \mathcal{B}_{\text{aff}}(s)$ n'est pas fermée, la fonction $s \mapsto \mathcal{B}(s)$ l'est. Ceci est explicité dans le résultat suivant :

Théorème 6. Soit $(f_s)_{s \in [0,1]}$ une famille continue de polynômes complexes en deux variables telle que $\chi(\mathcal{F}_{\text{gen}}(s))$ est constant et telle que f_s soit non-dégénéré au sens de Newton pour tout $s \in [0, 1]$. Alors la fonction multi-valuée $s \mapsto \mathcal{B}(s)$ est continue et fermée.

Remarque. Des méthodes très similaires ont servi dans [9] pour étudier le problème d'A'Campo suivant : étant donné f_0 un germe de singularité isolée, calculer le minimum $\mu(f_0) - \mu(f_s)$. Ce minimum étant pris sur l'ensemble des déformations (f_s) de f_0 . Une réponse (très partielle) est apportée dans [9].

Chapitre 2

Fonctions méromorphes

L'ÉTUDE des singularités des hypersurfaces a connu un formidable développement après le livre de J. Milnor *Singular points of complex hypersurfaces*. Il est fort possible que la motivation initiale de Milnor ait été de mieux comprendre les singularités de Brisekorn-Pham dont les entrelacs donnent des exemples de sphères exotiques. Le résultat le plus célèbre de ce livre est sûrement le “théorème de fibration de Milnor”, cependant des résultats moins connus sont contenus dans le dernier chapitre de ce livre, ils concernent les singularités réelles pour lesquelles Milnor donne un théorème de fibration. Pour ce théorème dans le cas réel, les hypothèses sont plus fortes que dans le cas holomorphe et les conclusions plus faibles.

La première partie de ce chapitre va consister à énoncer un théorème de fibration pour les fonctions méromorphes. L'origine de ce travail avec Anne Pichon était de mieux comprendre un cas particulier de singularités réelles, celles de $f\bar{g}$ où f, g sont des fonctions holomorphes. De notre point de vue cette étude est équivalente à celle –plus naturelle– des fonctions méromorphes par la remarque suivante : sur une sphère les applications de Milnor pour $f\bar{g}$ et f/g sont égales : $\frac{f\bar{g}}{|f\bar{g}|} = \frac{f/g}{|f/g|}$.

Plus précisément nous donnons une condition nécessaire appelée *semi-modérée* qui permet d'obtenir une fibration de l'entrelacs de f/g . Ensuite dans le cas de deux variables nous montrons la réciproque : si l'entrelacs de f/g est fibré alors la fonction f/g est semi-modérée. Nous énonçons finalement des résultats similaires pour les entrelacs à l'infini, ce qui répond à des questions de M. Hirasawa and L. Rudolph.

La deuxième partie du chapitre est un travail avec Anne Pichon et José Seade. Elle concerne la comparaison des différentes fibrations de Milnor. En effet dans son livre Milnor prouve que la fibre de Milnor associée

à la fibration

$$f : \mathbb{B}_\varepsilon^{2n} \cap f^{-1}(\mathbb{S}_\delta^1(0)) \longrightarrow \mathbb{S}_\delta^1(0)$$

et la fibre de la fibration

$$\frac{f}{|f|} : \mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1} \setminus f^{-1}(0) \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

sont difféomorphes. Nous comparons la fibre de la fibration

$$\frac{f/g}{|f/g|} : \mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1} \setminus (f^{-1}(0) \cup g^{-1}(0)) \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

obtenue précédemment avec les deux fibrations localement triviales qui correspondent aux valeurs 0 et ∞ :

$$\frac{f}{g} : \mathbb{B}_\varepsilon^{2n} \cap f^{-1}(\mathbb{S}_\delta^1(0)) \longrightarrow \mathbb{S}_\delta^1(0) \quad \text{et} \quad \frac{f}{g} : \mathbb{B}_\varepsilon^{2n} \cap f^{-1}(\mathbb{S}_\delta^1(\infty)) \longrightarrow \mathbb{S}_\delta^1(\infty).$$

Nous montrons que la fibre de la première fibration est obtenu comme recollement des fibres des deux dernières fibrations. Nous appliquons ceci pour le calcul des caractéristiques d'Euler des fibre de la fibration de Milnor $\frac{f/g}{|f/g|}$.

1 Les fibrations de Milnor

Pour un germe de fonction holomorphe $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ (dont on choisit un représentant défini sur un ouvert U de l'origine), nous notons $L_f = f^{-1}(0) \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1}$, $0 < \varepsilon \ll 1$, l'entrelacs à l'origine de f . Par le théorème de la structure conique, le type topologique de cet entrelacs est indépendant du choix de ε suffisamment petit, [Mi].

Théorème 7 (Milnor). *Soit $f : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe. Alors l'application*

$$\frac{f}{|f|} : \mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1} \setminus L_f \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

est une fibration C^∞ localement triviale.

Remarquons qu'il n'y a pas d'hypothèses de singularités isolées sur f . Cette fibration de Milnor a plusieurs applications, citons les quelques exemples suivants :

1. En théorie de nœuds. Cela fournit des exemples de nœuds et entrelacs fibrés.
2. En théorie de la dimension 3. Le complément de l'entrelacs dans la sphère est alors muni d'une fibration en cercle, ce qui en fait une variété de Waldhausen.

3. Pour les structures de contacts. Récemment les travaux de E. Giroux établissent un lien entre les structures de contacts et les entrelacs fibrés.
4. Pour les singularités. On remplace l'objet singulier $f^{-1}(0)$ par des objets "lisses" : l'entrelacs L_f , la fibration, la monodromie de cette fibration,...

Passons maintenant à une version réelle de ce théorème.

Théorème 8 (Milnor). Soit $f : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ un germe de fonction analytique tel que la matrice jacobienne $J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i \leq 2; 1 \leq j \leq m}$ soit de rang 2 pour tout $x \in U \setminus \{0\}$ (où U est un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^m$). Alors il existe une fibration :

$$\phi : \mathbb{S}_\varepsilon^{m-1} \setminus L_f \rightarrow \mathbb{S}^1.$$

Ici $L_f = f^{-1}(0) \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{m-1}$. Dans cet énoncé il y a une condition de singularités isolées réelles assez forte. Par exemple le nœud de huit peut-être réalisé comme l'entrelacs L_f pour une telle fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Il est bien connu que ce nœud est fibré. Par contre il ne peut être réalisé comme l'entrelacs d'une fonction holomorphe car il n'est pas du type "torique itéré".

2 Fibration de Milnor des fonctions méromorphes

2.1 Fonctions semi-modérées

Nous allons définir ce qu'est le comportement semi-modéré pour un germe de fonction méromorphe. En bref nous disons que f/g est *semi-modéré* si pour des valeurs $c \in \mathbb{P}^1$ en dehors d'un voisinage de 0 et ∞ les fibres $(f/g = c)$ intersectent transversalement les petites sphères centrées à l'origine.

Nous prouverons au paragraphe 3 que si le nombre de variables est 2 alors f/g est semi-modéré si et seulement si le type topologique de $(f(x, y) - cg(x, y) = 0)$ est constant pour $c \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$.

Venons en maintenant à la définition précise. Soit U un voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{C}^n et soient $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes sans facteurs communs telles que $f(0) = g(0) = 0$.

Soit f/g la fonction méromorphe $f/g : U \rightarrow \mathbb{P}^1$ définie par $(f/g)(x) = [f(x) : g(x)]$. Cette fonction est bien définie sur $U \setminus I(f/g)$, où $I(f/g) = \{x \in U \mid f(x) = 0 \text{ et } g(x) = 0\}$ sont les points d'indétermination.

Avec la convention de Milnor nous définissons le gradient de f/g en dehors de $I(f/g)$ par :

$$\text{grad}(f/g) = \left(\frac{\partial(f/g)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(f/g)}{\partial x_n} \right).$$

Considérons l'ensemble $M(f/g)$ des points de non-transversalité entre les fibres de f/g et les (petites) sphères \mathbb{S}_r^{2n-1} centrées à l'origine :

$$M(f/g) = \left\{ x \in \mathbb{U} \setminus I(f/g) \mid \exists \lambda \in \mathbb{C}, \text{grad} \frac{f}{g}(x) = \lambda x \right\}$$

Nous définissons maintenant un ensemble de bifurcation $\mathcal{B}_0 \subset \mathbb{P}^1$ associé au comportement à l'origine de la fonction méromorphe f/g .

Définition. L'ensemble de bifurcation \mathcal{B}_0 est l'ensemble des valeurs $c \in \mathbb{P}^1$ tel qu'il existe une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de points de $M(f/g)$ vérifiant :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x_k)}{g(x_k)} = c.$$

Nous pouvons enfin donner la définition de ce qui va être notre hypothèse principale de travail.

Définition. Le germe méromorphe f/g est *semi-modéré à l'origine* si $\mathcal{B}_0 \subset \{0, \infty\}$.

La terminologie provient d'une définition semblable (*semitame*) pour le comportement à l'infini des polynômes, [NZ]. La définition de $\mathcal{B}_0(f/g)$ donnée ici est légèrement différente de celle de l'article [10] où l'on imposait arbitrairement que 0 et ∞ sont des valeurs de bifurcation.

Exemple.

1. Pour $\frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{x}{y}$, nous avons $\mathcal{B}_0 = \emptyset$ et f/g est semi-modérée à l'origine.
2. Pour $\frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{x^2}{y^3}$, nous avons $\mathcal{B}_0 = \{0, \infty\}$ et f/g est semi-modérée à l'origine.
3. Pour $\frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{x(x+y^2)+y^3}{y^3}$ alors $\mathcal{B}_0 = \{0, 1, \infty\}$ et f/g n'est pas semi-modérée à l'origine.

2.2 Théorème de fibration

Théorème 9. Soient $f, g : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ deux germes de fonctions holomorphes sans facteurs communs tel que le germe méromorphe $\frac{f}{g}$ soit semi-modéré à l'origine. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, l'application de Milnor

$$\frac{f/g}{|f/g|} : \mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1} \setminus (L_f \cup -L_g) \rightarrow \mathbb{S}^1$$

est une fibration C^∞ localement triviale.

Le schéma de la preuve est similaire à celui du théorème de fibration de Milnor [Mi]. La condition "semi-modérée" permet de contrôler l'argument des nombres complexes $\lambda(t)$ qui apparaissent dans $M(f/g)$, lorsque t tend vers 0.

3 Fibration de Milnor en deux variables

3.1 Énoncé

Dans le cas de deux variables, nous pouvons dire beaucoup plus en ce qui concerne cette fibration de Milnor. Le point essentiel est que l'on prouve une réciproque au théorème 9. Nous donnons aussi une série de conditions équivalentes à l'existence de cette fibration.

Théorème 10. *Pour $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ et $g : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ deux germes holomorphes sans facteurs communs, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *La fonction méromorphe f/g est semi-modérée à l'origine ;*
2. *Toute valeur $c \neq 0, \infty$ est une valeur générique pour la topologie du pinceau $(f - tg = 0)_{t \in \mathbb{P}^1}$;*
3. *L'application de Milnor $\frac{f\bar{g}}{|f\bar{g}|} = \frac{f/g}{|f/g|} : \mathbb{S}_\varepsilon^3 \setminus (L_f \cup -L_g)$ est une fibration C^∞ localement triviale ;*
4. *Le (multi-)entrelacs $L_f \cup -L_g$ est fibré ;*
5. *0 est une valeur critique isolée du germe analytique réel défini par $f\bar{g} : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$.*

L'équivalence des conditions (4) et (5) est due à A. Pichon lorsque $0 \in \mathbb{C}^2$ est un point singulier isolé de f et g , cela a ensuite été généralisé par A. Pichon and J. Seade, voir [P], [PS]. Enfin le théorème 10 donne une nouvelle preuve de l'équivalence entre (4) et (2), due à F. Michel et H. Maugendre, [MM]. En dimension $n = 2$, une fibration par l'application de Milnor donne un (multi-)entrelacs fibré, voir [P], [10].

3.2 Idées de la preuve

L'équivalence entre (1) et (2) est une version méromorphe d'un résultat bien connu pour les singularités à l'infini des polynômes. La référence [D] est un bon survol des différentes notions de valeurs critiques à l'infini. Dans [10] on trouvera d'autres équivalences dans le cas des fonctions méromorphes, par exemple en terme de résolution des singularités.

En résumé nous savons déjà :

- (2) \Leftrightarrow (1), équivalence classique,
- (1) \Rightarrow (3), c'est le théorème 9,
- (3) \Rightarrow (5), car $n = 2$,
- (4) \Leftrightarrow (5), due à A. Pichon et J. Seade.

Il ne reste donc plus qu'à montrer l'implication (4) \Rightarrow (1). Ce qui est fait dans la proposition suivante :

Proposition 11. *Soient $f, g : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ deux germes holomorphes sans facteurs communs. Si le (multi-)entrelacs local $L_f \cup -L_g$ de f/g est fibré alors f/g est une fonction semi-modérée à l'origine.*

La preuve de cette proposition est la version méromorphe d'un théorème similaire de [1] dans le cas des singularités de polynômes à l'infini. La preuve utilise la résolution des singularités à l'infini et une condition nécessaire et suffisante pour un multi-entrelacs d'être fibré en termes de décomposition de Waldhausen du complément de l'entrelacs, voir [EN, Theorem 11.2], [1], [10].

3.3 Situation à l'infini

Le point de départ des recherches sur les résultats précédents concernait en fait les entrelacs à l'infini pour les germes analytiques réels $f\bar{g}$. Plus précisément dans [HR], M. Hirasawa et L. Rudolph observent que $\frac{f\bar{g}}{|f\bar{g}|} = \frac{f/g}{|f/g|}$ et posent les questions suivantes. A quelles conditions l'entrelacs $L_{f,\infty} \cup -L_{g,\infty}$ est-il fibré ? Lorsqu'il est fibré, la fibration associée est-elle celle de Milnor ? Rappelons que l'entrelacs à l'infini est $L_{f,\infty} = f^{-1}(0) \cap S_{\mathbb{R}}^3$ pour un \mathbb{R} suffisamment grand.

Nous avons dans les paragraphes précédents répondu aux versions locales de ces questions. Dans [10] nous répondons aussi aux interrogations de M. Hirasawa and L. Rudolph en définissant une notion de *semi-modérée à l'infini* :

Théorème 12. *Soient $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ deux applications polynomiales. Nous avons une équivalence entre les conditions suivantes :*

1. *la fonction méromorphe f/g est semi-modérée à l'infini ;*
2. *le (multi-)entrelacs $L_{f,\infty} \cup -L_{g,\infty}$ est fibré.*

De plus sous ces conditions l'application de Milnor

$$\frac{f/g}{|f/g|} : \mathbb{S}_{\mathbb{R}}^3 \setminus (L_{f,\infty} \cup -L_{g,\infty}) \rightarrow \mathbb{S}^1$$

est une fibration.

4 Comparaison des différentes fibres de Milnor

4.1 Les fibrations en jeu

Tout d'abord pour tenir compte des points I d'indétermination nous noterons par convention :

$$\frac{f}{g}^{-1}(c) = \{z \in \mathbb{U} \mid f(z) - cg(z) = 0\} \setminus I$$

Sous l'hypothèse “semi-modéré à l'origine” nous avons une fibration définie par $\frac{f/g}{|f/g|}$:

$$\frac{f/g}{|f/g|} : \mathbb{S}_\varepsilon^{2n-1} \setminus (L_f \cup L_g) \longrightarrow \mathbb{S}^1. \quad (2.1)$$

Nous notons

$$\mathcal{F} = \frac{f/g}{|f/g|}^{-1}(1)$$

une fibre de cette fibration.

Nous aurons besoin de regarder les choses pas trop près du lieu d'indétermination aussi nous utilisons une fibre tronquée :

$$\check{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \setminus \frac{f}{g}^{-1} \left(\mathbb{D}_\delta^2(0) \cup \mathbb{D}_\delta^2(\infty) \right)$$

pour $0 < \delta \ll \varepsilon$.

Il existe comme dans le cas holomorphe une notion de “tube de Milnor” qui donne lieu à une fibration. Reprenons la construction de [GLM]. Fixons $c \in \mathbb{P}^1$. Pour $0 < \varepsilon \ll 1$ et $0 < \delta \ll \varepsilon$ la restriction de $\frac{f}{g}$ définie par

$$\frac{f}{g} : \frac{f}{g}^{-1}(\mathbb{S}_\delta^1(c)) \cap \mathbb{B}_\varepsilon^{2n} \longrightarrow \mathbb{S}_\delta^1(c)$$

est une fibration localement triviale. En fait cette fibration est triviale pour des valeurs de c génériques. Le “tube de Milnor” $\frac{f}{g}^{-1}(\mathbb{S}_\delta^1(c))$ devient ici un tube pincé.

Définition. La fibre de cette fibration est appelé la *c-fibre de Milnor* et est notée

$$\mathcal{M}_{f/g}^c = \frac{f}{g}^{-1}(c') \cap \mathbb{B}_\varepsilon, \quad c' \in \mathbb{S}_\delta^1(c).$$

Remarquons que cette fibre $\mathcal{M}_{f/g}^c$ est une variété non-compact à bord et dans le cas semi-modéré à l'origine les fibres qui nous intéressent sont les fibres associées aux valeurs 0 et ∞ : $\mathcal{M}_{f/g}^0$ et $\mathcal{M}_{f/g}^\infty$.

Encore une fois nous restreignons la fibre, cette fois-ci en dehors d'un voisinage de l'origine. Pour $0 < \varepsilon' \ll \delta$ nous notons la fibre tronquée :

$$\check{\mathcal{M}}_{f/g}^c = \mathcal{M}_{f/g}^c \setminus \mathbb{B}_{\varepsilon'}^{2n}$$

4.2 Comparaison des fibrations

Nous avons besoin d'une condition supplémentaire qui exprime un bon comportement des fibres au voisinage du lieu d'indétermination, cette condition $\frac{f}{g}$ est la condition *(i)-modérée* ; elle revient à exiger que en un

point proche du lieu d'indétermination la sphère, la fibre $\frac{f}{g}^{-1}(c)$ et le tube de Milnor s'intersectent transversalement en ce point. Elle n'est nécessaire que pour $n \geq 3$. Cette condition sera détaillée au cours de la preuve.

Théorème 13. *Soient $f, g : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ deux germes de fonctions holomorphes sans facteurs communs tel que la fonction f/g soit semi-modérée à l'origine et (i)-modérée.*

1. *La fibre tronquée $\check{\mathcal{F}}$ associée à la fibration $\frac{f/g}{|f/g|}$ est difféomorphe à l'union des deux fibres de Milnor locales tronquées $\check{\mathcal{M}}_{f/g}^0$ et $\check{\mathcal{M}}_{f/g}^\infty$ associées aux fibrations définies par $\frac{f}{g}$:*

$$\check{\mathcal{F}} = \check{\mathcal{M}}_{f/g}^0 \cup \check{\mathcal{M}}_{f/g}^\infty.$$

2. *Les caractéristiques d'Euler vérifient :*

$$\chi(\check{\mathcal{F}}) = \chi(\check{\mathcal{M}}_{f/g}^0) + \chi(\check{\mathcal{M}}_{f/g}^\infty)$$

et

$$\chi(\mathcal{F}) = \chi(\mathcal{M}_{f/g}^0) + \chi(\mathcal{M}_{f/g}^\infty).$$

4.3 Applications

Corollaire 14. *Soient $f, g : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ deux germes holomorphes sans facteurs communs tels que f/g est semi-modérée à l'origine et (i)-modérée. Si de plus f et g ont une singularité isolée à l'origine alors*

$$\chi(\mathcal{F}) = (-1)^{n-1}(\mu(f, 0) + \mu(g, 0) - 2\mu(f + tg, 0)).$$

Où t est une valeur générique (ici $t \neq 0, \infty$) et μ désigne le nombre de Milnor.

Démonstration. C'est une application directe du théorème précédent à l'aide de la formule [GLM, Theorem 2] :

$$\chi(\mathcal{M}_{f/g}^0) = (-1)^{n-1}(\mu(f, 0) - \mu(f + tg, 0))$$

et

$$\chi(\mathcal{M}_{f/g}^\infty) = (-1)^{n-1}(\mu(g, 0) - \mu(f + tg, 0)).$$

□

Corollaire 15. *Soit $n = 2$. Nous savons que $\mathcal{M}_{f/g}^0$ (resp. $\mathcal{M}_{f/g}^\infty$) a le type d'homotopie d'un bouquet de λ_0 cercles (resp. λ_∞). Donc \mathcal{F} est homotope à un bouquet de $\lambda_0 + \lambda_\infty + 1$ cercles.*

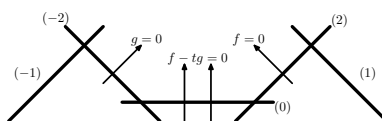


FIG. 2.1 – Arbre de résolution de $x^3 + y^2/x^2 + y^3$.

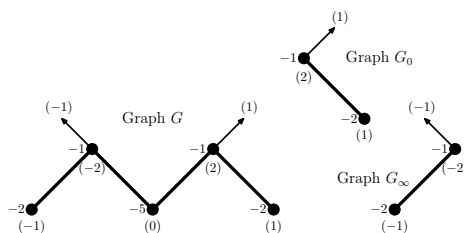


FIG. 2.2 – Graphe de résolution de $x^2 + y^3/x^3 + y^2$.

4.4 Un exemple

Soit $f(x, y) = x^3 + y^2$ et $g(x, y) = x^2 + y^3$. Cette fonction est semi-moderée à l'origine et puisque $n = 2$ la condition (i)-modérée n'intervient pas. Sur la figure 2.1 on dessine le graphe de résolution de $\frac{f}{g}$ et sur la figure 2.2 on représente le graphe dual. Entre parenthèses sont notées les multiplicités : les multiplicités positives correspondent au diviseur associé à la valeur 0, les multiplicités négatives correspondent au diviseur associé à la valeur ∞ , les multiplicités nulles correspondent aux composantes dicritiques. L'autre numéro correspond aux classes d'Euler.

A partir des graphes de résolution nous lisons que la fibre $\mathcal{M}_{f/g}^0$ a le type d'homotopie d'une sphère moins trois points (deux points correspondent à l'intersection du diviseur correspondant à la valeur 0 avec le dicritique et un point pour la transformée stricte ($f = 0$)). La fibre $\mathcal{M}_{f/g}^\infty$ a aussi le type d'homotopie d'une sphère moins trois points.

La fibre \mathcal{F} s'obtient comme recollement des fibres $\mathcal{M}_{f/g}^0$ et $\mathcal{M}_{f/g}^\infty$ le long des deux composantes de bord correspondant au dicritique. Ainsi \mathcal{F} est homotope à un tore privé de deux points.

4.5 Idées de la preuve

On prouve le théorème en appliquant deux fois la même construction une fois pour la portion de fibre de \mathcal{F} qui correspond aux valeurs $c \in \mathbb{P}^1$ tel que $|c| \in [0, r]$ et une autre fois pour les valeurs de c telle que $|c| \in [r, \infty]$. Une autre façon de le dire si l'on choisit par exemple $r = 1$, c'est de faire la construction pour $\frac{f}{g}$ autour de 0 puis pour $\frac{g}{f}$ autour de 0. Le recollement se fait le long des $(f - cg = 0)$ avec $|c| = r$. Nous décrivons uniquement la première construction.

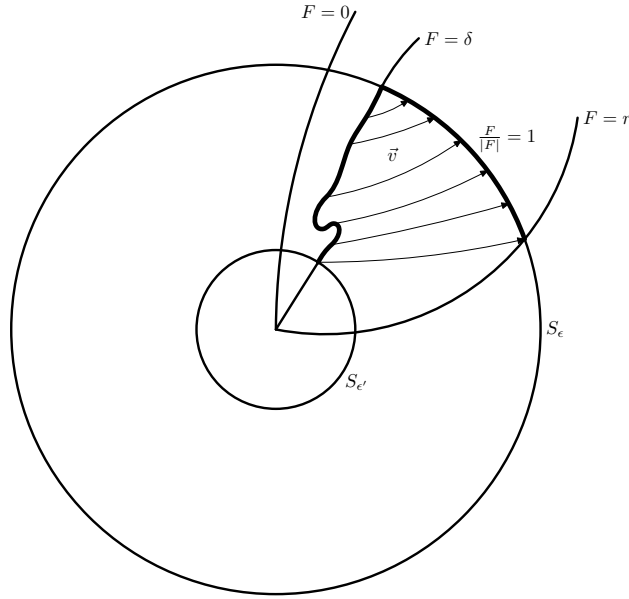


FIG. 2.3 – Situation générale et champ de vecteurs.

Fixons tout d'abord les constantes, l'ordre du choix est fondamental. Voir la figure 2.3 (où $F = \frac{f}{g}$).

1. Fixons $0 < r < \infty$, par exemple $r = 1$.
2. Fixons $0 < \epsilon \ll 1$, de telle sorte que $\mathbb{B}_{\epsilon}^{2n}$ soit une boule de Milnor pour $(f = 0)$, $(g = 0)$, les points d'indétermination I et les fibres $\frac{f}{g}^{-1}(z), z \in \mathbb{S}_r^1(0)$
3. Prenons alors $\delta, 0 < \delta \ll \epsilon$ qui va définir le tube pincé de Milnor.
4. Soit $0 < \epsilon' \ll \delta$. Nous allons retirer la boule $\mathbb{B}_{\epsilon'}^{2n}$ afin de nous écarter de l'origine.
5. Finalement fixons $0 < \eta \ll \epsilon'$, qui définit le rayon du voisinage tubulaire des points d'indétermination :

$$T_{\eta} = \{z \in \mathbb{B}_{\epsilon}^{2n} \mid |f(z)|^2 + |g(z)|^2 = \eta^2\}.$$

Nous voulons montrer que la 0-fibre de Milnor tronquée

$$\check{\mathcal{M}}_{f/g}^0 = \frac{f}{g}^{-1}(\delta) \setminus \mathbb{B}_{\epsilon'}^{2n}$$

est difféomorphe à la portion suivante de \mathcal{F} dans $\mathbb{S}_{\epsilon}^{2n-1}$:

$$\check{\mathcal{F}}_0 = \frac{f/g}{|f/g|}^{-1}(\mathbb{D}_r^2(0) \setminus \mathbb{D}_{\delta}^2(0))$$

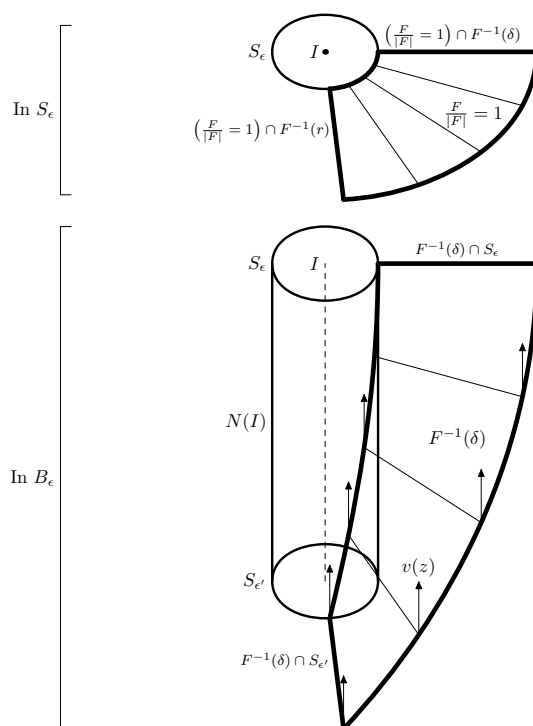


FIG. 2.4 – Champs de vecteurs et points d'indétermination.

Comme dans le livre de Milnor [Mi], l'idée est d'intégrer un champ de vecteurs v qui vérifie les propriétés suivantes :

- (i) L'argument de f/g est constant le long des courbes intégrales de v .
- (ii) Le champ de vecteurs v est sortant aux sphères, autrement dit la norme des courbes intégrales est une fonction strictement croissante.
- (iii) Pour les points du tube T_η le champ de vecteurs v est tangent à T_η .

Techniquement ces conditions sont réalisées avec les conditions suivantes :

1. Pour tout z , $\langle v(z), \text{grad} \log \frac{f}{g}(z) \rangle = +1$,
2. Pour tout $z \notin M(f/g)$, $\langle v(z), z \rangle > 0$,
3. Pour tout $z \in M(f/g)$, $\text{Re} \langle v(z), z \rangle > 0$,
4. Pour tout $z \in T_\eta$, $v(z)$ appartient à l'espace tangent de T_η en z .

On rappelle que $M(f/g)$ définit au début de ce chapitre est l'ensemble des points de non-transversalité des fibres $\frac{f}{g}^{-1}(c)$ avec les sphères.

La condition " $\frac{f}{g}$ semi-modérée" permet de construire un champ de vecteurs qui vérifie les conditions (1), (2) et (3) ci-dessus. La condition (4)

n'est pas toujours vérifiée, c'est pourquoi nous rajoutons la condition " $\frac{f}{g}$ (i)-modéré".

Définition. Soit $n \geq 3$. La fonction f/g est (i)-modérée si pour tout $z \in T_\eta$ et $z \notin M(f/g)$ les vecteurs

$$z, \quad \text{grad} \frac{f}{g}(z), \quad \text{grad}_{\mathbb{R}}(|f|^2 + |g|^2)(z)$$

sont \mathbb{C} -linéairement indépendants.

Pour $n = 2$ la condition (i)-modérée est vide. Nous ne considérons pas les points $z \in M(f/g)$, car pour ceux là z et $\text{grad} \frac{f}{g}(z)$ sont déjà liés. Sous la condition "(i)-modérée", on peut en plus construire le champ de vecteurs tangent au tube T_η . Voir les figures 2.3 et 2.4.

L'intégration de ce champ de vecteurs fournit un difféomorphisme entre $\check{\mathcal{M}}_{f/g}^0 = \frac{f}{g}^{-1}(\delta) \setminus \mathbb{B}_{\varepsilon'}^{2n}$ et $\check{\mathcal{F}}_0 = \frac{f/g}{|f/g|}^{-1}(\mathbb{D}_r^2(0) \setminus \mathbb{D}_\delta^2(0))$. De plus ce difféomorphisme envoie le bord

$$\check{\mathcal{M}}_{f/g}^0 \cap \mathbb{S}_{\varepsilon'}^{2n-1}$$

sur

$$\check{\mathcal{F}}_0 \cap \frac{f}{g}^{-1}(r).$$

Ce qui justifie le recollement avec $\check{\mathcal{M}}_{f/g}^\infty$.

Chapitre 3

Points entiers sur les courbes algébriques

CE TRAVAIL représente la partie charnière de mes travaux récents dans le sens où l'on obtient des résultats arithmétiques à l'aide d'outils algébriques et de preuves topologiques.

La motivation de départ venait du théorème de Heath-Brown [HB] qui obtient une borne asymptotique pour le nombre $N(\mathcal{C}, B)$ de points à coordonnées entières situés sur une courbe algébrique \mathcal{C} de degré d , dont l'abscisse et l'ordonnée sont bornées par la variable B . La borne est du type $N(\mathcal{C}, B) = c_d B^{\frac{1}{d}}$ où c_d est une constante qui dépend uniquement du degré d . Malheureusement quand l'on cherche à expliciter c_d on n'obtient pas une constante raisonnable, [Wa].

On peut alors partir du problème inverse : trouver des exemples ayant le plus grand $N(\mathcal{C}, B)$ possible. L'exemple immédiat est $\mathcal{C} = (x - y^d = 0)$ qui donne $N(\mathcal{C}, B) \leq 2B^{\frac{1}{d}} + 1$. Donc ici $c_d = 2$ ce qui est très loin de la borne de Heath-Brown.

Ici nous regardons seulement un type spécial de courbes : les courbes \mathcal{C} qui sont des fibres génériques d'un polynôme $P(x, y)$. Pour une telle courbe \mathcal{C} nous montrons qu'à automorphisme algébrique près \mathcal{C} (et même P) est équivalente soit à une droite d'équation $(x = 0)$ soit à l'équation de Pell $(x^2 - qy^2 = 1)$. En appliquant ceci au problème du nombre asymptotique de points entiers sur \mathcal{C} nous obtenons que $N(\mathcal{C}, B) \leq 2B^{\frac{1}{d}} + 1 + \varepsilon$. Ce qui en fait la meilleure borne possible.

1 Points entiers sur les courbes : le théorème de Siegel

Soit $P \in \mathbb{Q}[x, y]$ un polynôme et $\mathcal{C} = (P(x, y) = 0) \subset \mathbb{C}^2$ la courbe algébrique correspondante. On s'intéresse aux points entiers sur la courbe

\mathcal{C} , c'est-à-dire à l'ensemble

$$\mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^2.$$

La première question qui survient lorsque l'on veut compter le nombre de points entiers est évidemment la suivante : ce nombre est-il fini ?

Une grande partie de la réponse est contenue dans le théorème de Siegel.

Théorème 16 (Théorème de Siegel). *Soit \mathcal{C} une courbe algébrique irréductible. Si le nombre de points entiers $\mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^2$ est infini alors \mathcal{C} est une courbe rationnelle.*

La seconde question est plus difficile : combien y-a-t'il de points entiers ? Malheureusement le théorème de Siegel n'est pas effectif : pour une courbe de genre ≥ 1 il n'existe pas de formule pour calculer $\#(\mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^2)$. Ce qui est surprenant, c'est que l'on sait compter le nombre de points entiers lorsqu'il y en a un nombre infini ! C'est ce que l'on verra plus loin, au paragraphe 4.

Une question connexe concerne le nombre de points à coordonnées dans \mathbb{Q} : le théorème de Faltings affirme alors que si $\mathcal{C} \cap \mathbb{Q}^2$ est infini alors le genre de \mathcal{C} est égal à 0 ou 1.

2 Automorphismes algébriques du plan et le théorème d'Abhyankar-Moh-Suzuki

Soit $K = \mathbb{Q}$ ou $K = \mathbb{C}$. Rappelons qu'un *automorphisme algébrique* $\Phi \in \text{Aut } K^2$ est

- une application polynomiale $\Phi : K^2 \longrightarrow K^2$,
- telle que Φ soit inversible,
- et Φ^{-1} est aussi une application polynomiale.

Cela permet d'établir une relation d'équivalence sur l'ensemble des polynômes. Deux polynômes $P, Q \in K[x, y]$ sont *algébriquement équivalents* sur K s'il existe $\Phi \in \text{Aut } K^2$ et $\Psi : K \longrightarrow K$ de la forme $\Psi(z) = \alpha z + \beta$, $\alpha \in K^*$, $\beta \in K$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} K^2 & \xrightarrow{\Phi} & K^2 \\ P \downarrow & & \downarrow Q \\ K & \xrightarrow{\Psi} & K. \end{array}$$

Remarque. Attention, cette définition est légèrement différente de celle de l'article [14].

Par exemple $P(x, y) = x - y^d$ est algébriquement équivalent sur K à $Q(x, y) = x$ à l'aide des automorphismes $\Phi(x, y) = (x + y^d, y)$, $\Psi(z) = z$.

Le théorème d'Abhyankar-Moh-Suzuki [Ar, AM, Ru] caractérise de façon topologique les polynômes algébriquement équivalents au polynôme trivial $Q(x, y) = x$.

Théorème 17 (Théorème d'Abhyankar-Moh-Suzuki). *Soit $\mathcal{C} = (P(x, y) = 0) \subset \mathbb{C}^2$ une courbe non-singulière et homéomorphe à \mathbb{C} alors P est algébriquement équivalent sur \mathbb{C} à x .*

En fait dans les preuves nous aurons besoin de la version originale, mais plus technique, de ce théorème, [AM].

3 Points entiers sur les fibres génériques

Voici le principal résultat de ce chapitre. Il caractérise les courbes qui sont à la fois des fibres génériques et qui ont une infinité de points entiers.

Théorème 18. *Soit $P \in \mathbb{Q}[x, y]$ et $k \in \mathbb{Q} \setminus \mathcal{B}$ une valeur générique. Supposons de plus que $\mathcal{C} = (P(x, y) = k)$ soit une courbe irréductible dans \mathbb{C}^2 . Si \mathcal{C} possède une infinité de points entiers $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ alors P est algébriquement équivalent sur \mathbb{Q} à*

$$x \quad \text{ou} \quad x^2 - qy^2,$$

où $q \in \mathbb{N}^*$ n'est pas le carré d'un entier naturel.

Dans le cas où P est algébriquement équivalent à x alors l'ensemble de bifurcation $\mathcal{B}(P) = \emptyset$; si P est algébriquement équivalent sur \mathbb{Q} à $x^2 - qy^2$ alors il est algébriquement équivalent sur \mathbb{C} à xy et l'ensemble de bifurcation $\mathcal{B}(P)$ est un singleton.

Réciproquement la courbe $(x = 0)$ a une infinité de points entiers! Mais aussi par exemple la courbe $(x^2 - 2y^2 = 1)$ qui est l'équation de Pell. Par contre pour une valeur non-générique ce résultat n'est plus valide : il suffit de considérer $\mathcal{C} = (x^2 - y^3 = 0)$. Si l'on supprime l'hypothèse "C irréductible" la conclusion devient $P = h(Q)$, avec $h \in \mathbb{Q}[t]$ et Q algébriquement équivalent à x ou à $x^2 - qy^2$.

Le théorème 18 peut donc s'interpréter comme une version arithmétique du théorème d'Abhyankar-Moh-Suzuki. D'un autre point de vue cela donne un résultat du type de ceux de Nguyen Van Chau, [NVC], qui concerne la recherche de contre-exemple à la conjecture jacobienne : pour un couple de polynôme $(P, Q) \in \mathbb{C}[x, y]^2$ tel que $\text{Jac}(P, Q) = 1$ et la courbe $\mathcal{C} = (P = 0)$ est une fibre générique contenant une infinité de points entiers alors $(P, Q) \in \text{Aut } \mathbb{C}^2$.

4 Nombre de points entiers

Soit $\mathcal{C} = (P(x, y) = 0)$ une courbe algébrique et $d = \deg P$. Pour compter le nombre de points entiers sur \mathcal{C} nous définissons le nombre suivant :

$$N(\mathcal{C}, B) = \# \left\{ (x, y) \in \mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^2 \mid |x| \leq B \text{ et } |y| \leq B \right\}.$$

Cette façon de compter est justifiée par les deux remarques suivantes :

- le nombre de points entiers peut-être infini, aussi $N(\mathcal{C}, B)$ décrit le comportement asymptotique des points entiers ;
- il n'existe pas de version effective du théorème de Siegel donc toute estimation de $N(\mathcal{C}, B)$, même dans le cas où ce nombre est fini reste intéressante.

Les résultats de Heath-Brown [HB] donnent des majorations pour ce nombre. Ils ont été explicités par Walkowiak [Wa] :

Théorème 19 (Théorème d'Heath-Brown). *Pour toute courbe \mathcal{C} irréductible de degré d et tout $B > 0$:*

1. (Heath-Brown) $N(\mathcal{C}, B) \leq c_d B^{\frac{1}{d} + \varepsilon}$ pour une certaine constante c_d ,
2. (Walkowiak) $N(\mathcal{C}, B) \leq 2^{48} d^8 \ln(B)^5 B^{\frac{1}{d}}$.

Le terme $B^{\frac{1}{d}}$ est optimal, par contre le terme $2^{48} d^8 \ln(B)^5$ est très loin de l'être. Le but de ce paragraphe est de donner une borne optimale pour les courbes étudiées dans le théorème 18. Tout d'abord la cas de l'équation de Pell est bien connu, [Se, p. 135] :

Théorème 20. *Si $\mathcal{C} = (P = k)$ et P est algébriquement équivalent à $x^2 - qy^2$ alors il existe $C > 0$ et $n \geq 1$ tels que*

$$N(\mathcal{C}, B) \leq C \cdot \ln(B)^n.$$

Bien sûr cela implique que pour B assez grand $N(\mathcal{C}, B) \leq B^{\frac{1}{d}}$. Maintenant si P n'est pas algébriquement équivalent à $x^2 - qy^2$ alors le théorème 18 affirme que \mathcal{C} admet une paramétrisation polynomiale : soit $(p(t), p'(t))$ une telle paramétrisation de \mathcal{C} à coefficients rationnels. De plus nous avons $\deg P$ égal à $\deg p$ ou à $\deg p'$. On suppose $\deg P = \deg p$ et alors

$$p(t) = \frac{1}{b} (a_d t^d + a_{d-1} t^{d-1} + \dots + a_0).$$

avec $a_0, \dots, a_d, b \in \mathbb{Z}$ et $\gcd(a_0, \dots, a_d, b) = 1$.

Théorème 21. *Soit \mathcal{C} comme dans le théorème 18. Le nombre $N(\mathcal{C}, B)$ de points entiers \mathcal{C} bornés par B , vérifie :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B_0 \geq 0 \quad \forall B \geq B_0 \quad N(\mathcal{C}, B) \leq 2 a_d^{1-\frac{1}{d}} b^{\frac{1}{d}} B^{\frac{1}{d}} + 1 + \varepsilon.$$

En fait on trouve une borne pour toutes les courbes admettant une paramétrisation polynomiale. Pour rendre l'énoncé plus clair prenons l'exemple où $a_d = 1$ et $b = 1$ alors pour B assez grand nous obtenons :

$$N(\mathcal{C}, B) \leq 2B^{\frac{1}{d}} + 1 + \varepsilon.$$

L'exemple $\mathcal{C} = (x - y^d = 1)$ est une courbe où le terme ε est nécessaire. Par contre on peut s'en débarrasser pour certains B avec l'astuce suivante : choisissons $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et un entier B suffisamment grand tel que $B^{\frac{1}{d}}$ soit un entier alors

$$N(\mathcal{C}, B) \leq 2B^{\frac{1}{d}} + 1.$$

5 Idées de la preuve

5.1 Preuve du théorème 21

Si l'on admet le théorème 18 la preuve du théorème 21 devient élémentaire. En effet une fois que nous avons reformulé la conclusion du théorème 18, notre hypothèse du théorème 21 devient que notre courbe admet une paramétrisation par des polynômes.

Expliquons alors comment évaluer le nombre de points entiers. Soit $(p(t), q(t))$ une paramétrisation de notre courbe \mathcal{C} et soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^2$ un point entier de \mathcal{C} . Nous supposons que (x_0, y_0) n'est pas un point singulier (les points singuliers de \mathcal{C} sont en nombres finis). Donc il existe $t_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(p(t_0), q(t_0)) = (x_0, y_0)$. Le fait essentiel est que comme le point est non-singulier et à coordonnées entières alors $t_0 \in \mathbb{Q}$. Nous nous intéressons maintenant uniquement à la première coordonnée : nous obtenons $p(t_0) = x_0$. Ce qui donne

$$\frac{1}{b}(a_d t_0^d + \dots + a_0) = x_0, \quad t_0 \in \mathbb{Q}, x_0 \in \mathbb{Z}, a_0, \dots, a_d, b \in \mathbb{Z}.$$

En écrivant $t_0 = \frac{\alpha}{\beta}$ nous obtenons par un critère élémentaire sur les racines rationnelles des polynômes à coefficients entiers que β divise a_d . Donc $t_0 \in \frac{1}{\beta}\mathbb{Z}$. Alors nous obtenons l'inclusion

$$\mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^2 \subset \left\{ (p(t), q(t)) \mid t \in \frac{1}{\beta}\mathbb{Z} \right\} \cup \text{Sing } \mathcal{C}.$$

Nous obtenons la majoration de $N(\mathcal{C}, B)$ en évaluant quand $p(t) > B$.

5.2 Preuve du théorème 18

Par le théorème de Siegel comme $\mathcal{C} = (P(x, y) = k)$ contient une infinité de points entiers alors \mathcal{C} est une courbe rationnelle ; \mathcal{C} admet donc une

paramétrisation par des fractions rationnelles :

$$t \mapsto \left(\frac{p(t)}{r(t)}, \frac{q(t)}{r(t)} \right), \quad p, q, r \in \mathbb{Q}[t].$$

De plus un théorème de Maillet donne des restrictions sur le dénominateur $r(t)$: soit $r(t) = 1$, soit $r(t) = (\alpha t^2 + \beta t + \gamma)^{\frac{d}{2}}$ avec $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, $\alpha \neq 0$.

Comme \mathcal{C} est une fibre générique de P alors en particulier $\text{Sing } \mathcal{C} = \emptyset$. Dans le premier cas nous obtenons que \mathcal{C} est homéomorphe à \mathbb{C} (i.e. à un disque) et par le théorème d'Abhyankar-Moh-Suzuki $P(x, y)$ est algébriquement équivalent sur \mathbb{C} au polynôme x .

Dans le second cas la paramétrisation définit un homéomorphisme entre \mathcal{C} et \mathbb{C}^* (en fait entre \mathcal{C} et $\mathbb{P}^1 \setminus \{\tau_1, \tau_2\}$ où τ_1, τ_2 sont les racines de $\alpha t^2 + \beta t + \gamma$). Donc \mathcal{C} est homéomorphe à un anneau. Nous pouvons donc utiliser la classification, due à W. Neumann [Ne], des fibres génériques qui sont des anneaux : $P(x, y)$ est algébriquement équivalent sur \mathbb{C} soit à $x^p y^q$, soit à $x^p (y x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \dots + a_0)^q$.

Commence alors une partie technique pour prouver que dans les deux cas précédents les équivalences algébriques sur \mathbb{C} peuvent être choisies sur \mathbb{Q} . Et une autre partie technique permet de supposer qu'un point entier de \mathcal{C} est envoyé sur un point entier par l'équivalence algébrique. Il y a toutefois une petite subtilité pour le second cas, soit le polynôme P est réductible sur \mathbb{Q} et alors nous obtenons que P est algébriquement équivalent sur \mathbb{Q} à $x^p y^q$ ou à $x^p (y x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \dots + a_0)^q$. Soit P est irréductible sur \mathbb{Q} mais admet deux facteurs irréductibles sur \mathbb{C} (sans tenir compte des multiplicités). Un calcul montre qu'alors P est algébriquement équivalent sur \mathbb{Q} à $x^2 - \ell y^2$.

Le bilan de ce que nous pouvons obtenir est le suivant : P est algébriquement équivalent sur \mathbb{Q} à

$$x, x^2 - \ell y^2, x^p y^q, x^p (y x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \dots + a_0)^q.$$

Les deux premiers polynômes correspondent à la conclusion du théorème 18. Les deux derniers sont exclus par l'argument suivant : la courbe \mathcal{C} est envoyée sur une courbe d'équation $\mathcal{C}_1 = (x^p y^q = k)$ ou $\mathcal{C}_2 = (x^p (y x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \dots + a_0)^q = k)$, $k \neq 0$, les points entiers de \mathcal{C} étant envoyés sur des points entiers. Mais \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont des courbes dont les branches à l'infini sont asymptotes aux axes de coordonnées $x = 0$ ou $y = 0$. De telles courbes ne peuvent contenir qu'un nombre fini de points entiers et donc \mathcal{C} elle-même ne contient qu'un nombre fini de points entiers.

Chapitre 4

Déformation des polynômes : point de vue arithmétique

LA CONTREPARTIE arithmétique de l'étude topologique pour l'ensemble de bifurcation et des fibres irrégulières consiste à regarder les fibres qui ne sont pas irréductibles. Le théorème de Stein affirme que soit toutes les fibres $(P(x, y) - c = 0)_{c \in \mathbb{C}}$ sont réductibles, soit seulement un nombre fini. De plus si ce nombre est fini, il est strictement plus petit que le degré de P . Dans un premier temps nous cherchons à généraliser les deux aspects de ce résultat (la finitude et la borne) pour les fractions rationnelles, avec un nombre quelconque de variables, sur un corps K algébriquement clos.

Dans un second temps nous étudions avec Pierre Dèbes et Salah Najib un problème plus général : la déformation d'un polynôme P appartenant à $K[x_1, \dots, x_n]$ par un ou plusieurs monômes Q_1, \dots, Q_ℓ . Dans cette situation, pour un P fixé, nous caractérisons les ensembles de monômes $\{Q_1, \dots, Q_\ell\}$ qui rendent le polynôme déformé $P + \lambda_1 Q_1 + \dots + \lambda_\ell Q_\ell$ irréductible pour des valeurs génériques de $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$. Pour finir nous appliquons les résultats de la première partie afin de quantifier ces valeurs génériques.

1 Motivations

Nous avons vu que pour un polynôme $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ il existe un ensemble de bifurcation fini $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}$ tel que

$$f : f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \mathcal{B}) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \mathcal{B}$$

soit une fibration localement triviale. Il existe des bornes sur le cardinal de \mathcal{B} par exemple, pour $n = 2$ et $\mathcal{B}_\infty \neq \emptyset$ nous avons, [GP],

$$\#\mathcal{B} \leq (\deg f)^2 - 3 \deg f + 1.$$

L'équivalent arithmétique de ce résultat est le théorème de Stein.

Théorème 22 (Théorème de Stein). *Pour $P \in \mathbb{C}[x, y]$ qui n'est pas composé, alors*

1. *Le spectre $\sigma = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid P(x, y) - \lambda \text{ est réductible}\}$ est fini.*
2. *$\#\sigma < \deg P$.*

Rappelons qu'un polynôme $P \in K[x, y]$ est *composé*, s'il existe $h \in K[t]$ avec $\deg h \geq 2$ et $Q \in K[x, y]$ tel que $P = h \circ Q$. Par exemple le polynôme $P(x, y) = (xy)^2 + xy + 1$ est composé et pour toute valeur $\lambda \in \mathbb{C}$, $P(x, y) - \lambda$ est réductible. A contrario $P(x, y) = y(x-1)(x-2)\dots(x-d+1) + x$ est non-composé de degré d et $\sigma = \{1, 2, \dots, d-1\}$. La borne de Stein est donc optimale.

Il existe un grand nombre de généralisations de ce théorème : à un corps algébriquement clos quelconque et avec un nombre $n \geq 2$ quelconque de variables, voir [Na] pour les références.

Revenons maintenant à la topologie ! Lorsque l'on considère des fonctions méromorphes et non plus des polynômes, on est amené à étudier des pincesaux. Par exemple étudier les fibres de la fonction méromorphe P/Q revient à l'étude du pinceau ($P - \lambda Q = 0$). Une telle étude (locale) dans le cas $n = 2$ a été faite par exemple dans [LW] où les auteurs montrent l'existence d'un ensemble de bifurcation fini pour le pinceau. La première partie de chapitre est consacrée à établir les deux aspects du théorème de Stein pour des fractions rationnelles $\frac{P}{Q}$, qui correspond donc à une déformation $P - \lambda Q$: tout d'abord montrer l'existence d'un spectre fini et ensuite établir une majoration pour le cardinal.

La seconde partie concerne le cas d'une déformation $P + \lambda_1 Q_1 + \dots + \lambda_\ell Q_\ell$ dans le cas particulier où les Q_i sont des monômes. Pour un polynôme P donné nous caractérisons les monômes Q_i tel que pour un choix générique de $(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$, le polynôme $P + \lambda_1 Q_1 + \dots + \lambda_\ell Q_\ell$ soit irréductible. Cette seconde partie est un travail avec Pierre Dèbes et Salah Najib.

2 Un théorème de Stein pour les fractions rationnelles

2.1 Fractions non-composées

Soit K un corps algébriquement clos, de caractéristique quelconque. Notons $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 2$. Si $f = \frac{p}{q} \in K(\underline{x})$ et $\text{pgcd}(p, q) = 1$, le degré de f est

$$\deg f = \max\{\deg p, \deg q\}.$$

Définition. Une fraction rationnelle $f \in K(\underline{x})$ est *composée* s'il existe $g \in K(\underline{x})$ et $r \in K(t)$ avec $\deg r \geq 2$ telles que

$$f = r \circ g.$$

Par exemple la fraction $f(x, y) = \frac{xy}{x^2y^2+1}$ est composée. Nous passerons souvent de l'étude des fibres $\frac{P}{Q} = \lambda$ à celle du pinceau ($P - \lambda Q = 0$). Le premier résultat obtenu correspond à la partie (1) du théorème 22 de Stein.

Théorème 23. Soit $f = \frac{P}{Q} \in K(\underline{x})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est composée ;
2. $P - \lambda Q$ est réductible dans $K[\underline{x}]$ pour tout $\lambda \in K$ tel que $\deg P - \lambda Q = \deg f$;
3. $P - \lambda Q$ est réductible dans $K[\underline{x}]$ pour une infinité de $\lambda \in K$.

Corollaire 24. Si f est non-composée alors le spectre de f

$$\sigma(f) = \{\lambda \in K \mid P - \lambda Q \text{ est réductible}\}$$

est un ensemble fini.

Notez que pour $Q = 1$ on retrouve exactement la partie (1) du théorème de Stein.

2.2 Idées de la démonstration

La partie difficile est l'implication (3) \Rightarrow (1). C'est en fait une conséquence du théorème de Bertini-Krull qui est un théorème général sur les déformations $P + \lambda_1 Q_1 + \dots + \lambda_\ell Q_\ell$, où P et les Q_i sont des polynômes. Pour un corps de caractéristique 0 le théorème de Bertini-Krull donne l'existence de deux polynômes $\phi(x_1, \dots, x_n), \psi(x_1, \dots, x_n)$ et de polynômes homogènes de degré $d \geq 2$, $h(u, v)$, $h_i(u, v)$ tels que

$$P(x_1, \dots, x_n) = h(\phi(x_1, \dots, x_n), \psi(x_1, \dots, x_n))$$

et

$$Q_i(x_1, \dots, x_n) = h_i(\phi(x_1, \dots, x_n), \psi(x_1, \dots, x_n)).$$

Appliqué à notre situation ($\ell = 1$), nous obtenons

$$\frac{P}{Q} = \frac{h(\phi, \psi)}{h'(\phi, \psi)} = \frac{h}{h'} \left(\frac{\phi}{\psi}, 1 \right) = r \left(\frac{\phi}{\psi} \right).$$

2.3 Borne du cardinal du spectre

Théorème 25. Soit $f \in K(\underline{x})$ une fraction non-composée, alors

$$\#\sigma(f) < (\deg f)^2.$$

Remarque. – Cela correspond au point (2) du théorème 22 de Stein.

- Pour $n = 2$ c'est un résultat de Rupert [Rup] ($K = \mathbb{C}$) ou de Lorenzini [Lo] (K quelconque, avec une hypothèse géométrique).
- En fait on montre un résultat plus précis qui tient compte du nombre de composantes irréductibles pour chaque élément du spectre.
- Cette borne (en tenant compte du nombre de composantes) est optimale, au moins pour $n = 2$ et $\deg f = 3$.

2.4 Idées de la démonstration

En fait la preuve complète que nous donnons dans [11] et que nous expliquons maintenant reprend les idées de Stein et aboutit à la borne

$$\#\sigma(f) < (\deg f)^2 + \deg f,$$

pour un corps K de caractéristique nulle. Pour obtenir la borne spécifiée dans le théorème 25 il faut partir de la borne de Lorenzini pour le cas de deux variables. Pour plus de détails voir [11].

On montre le résultat pour $n = 2$ et ensuite on procède par induction. Soit

$$C_f = \left\{ g \in K(x, y) \mid \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \right\}$$

le noyau de la dérivation jacobienne. Nous avons le résultat intermédiaire suivant :

Théorème 26. Si f n'est pas une fraction composée alors $C_f = K(f)$.

Supposons par l'absurde que $\#\sigma(f) \geq (\deg f)^2 + \deg f$. Pour chaque $\lambda \in \sigma(f)$ nous décomposons

$$P - \lambda Q = F_{1,\lambda} \times \cdots \times F_{k_\lambda,\lambda}.$$

Soit

$$g = \prod_{\lambda \in \sigma(f)} F_{1,\lambda} \times \cdots \times F_{k_\lambda-1,\lambda}.$$

En utilisant la borne sur $\#\sigma(f)$ il est possible de montrer que $g \in C_f$, donc d'après le théorème 26, $g \in K(f)$. Écrivons

$$g = \frac{u(f)}{v(f)} = \frac{\left(\frac{P}{Q} - \mu_1\right) \cdots \left(\frac{P}{Q} - \mu_\ell\right)}{\left(\frac{P}{Q} - \mu_{\ell+1}\right) \cdots}$$

donc

$$g = Q^k \frac{(P - \mu_1 Q) \cdots (P - \mu_\ell Q)}{(P - \mu_{\ell+1} Q) \cdots}.$$

Fixons un $\lambda_0 \in \sigma(f)$. Par définition de F_{1,λ_0} nous avons que F_{1,λ_0} divise $P - \lambda_0 Q$. Par définition de g nous savons que F_{1,λ_0} divise g , donc il existe i tel que F_{1,λ_0} divise $P - \mu_i Q$. Cela donne $\lambda_0 = \mu_i$. Et finalement comme $P - \mu_i Q$ divise g alors nous trouvons que $F_{1,\lambda_0} \times \cdots \times F_{k_{\lambda_0},\lambda_0}$ divise g . Ce qui est contradictoire avec la définition de g .

3 Déformation des polynômes

3.1 Motivations et définitions

Prenons $P(x, y) = \sum a_{i,j} x^i y^j$ un polynôme de deux variables sur K , corps algébriquement clos. Fixons des indices (i_0, j_0) . Nous allons montrer un résultat dont j'énonce informellement un corollaire ainsi : "P(x, y) + $\lambda x^{i_0} y^{j_0}$ est irréductible pour tout $\lambda \in K$ sauf un nombre fini et sauf des cas particuliers de P ."

Plus précisément nous montrons un tel résultat pour un nombre quelconque de variables, en autorisant des déformations par plusieurs monômes. Nous utiliserons aussi les résultats des paragraphes précédents pour borner le nombre fini de valeurs λ exceptionnelles.

Finalement nous donnons une description explicite et complète des polynômes P pour lesquels ce résultat n'est pas vrai. Un tel exemple de cas particulier est un polynôme homogène P de degré d de deux variables, alors $P(x, y) + \lambda x^{i_0} y^{j_0}$ est réductible pour tout $\lambda \in K$ si $i_0 + j_0 = d$.

Passons maintenant à la situation générale. Soit K un corps algébriquement clos, de caractéristique quelconque. Soit $n \geq 2$. Soit P appartenant à $K[x_1, \dots, x_n]$. Soient $Q_1, \dots, Q_\ell \in K[x_1, \dots, x_n]$ des monômes de degré inférieur ou égal au degré de P . Nous supposons que les Q_i sont distincts et que $\text{pgcd}(P, Q_1, \dots, Q_\ell) = 1$.

Notons

$$\Sigma = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) \in K^\ell \mid P + \lambda_1 Q_1 + \cdots + \lambda_\ell Q_\ell \text{ est réductible dans } K[x_1, \dots, x_n]\}.$$

Nous disons alors que $\{Q_1, \dots, Q_\ell\}$ est un *lieu de réductibilité* pour P si Σ contient un ouvert (non vide) de Zariski.

Par exemple dans la situation $\ell = 1$, $Q_1 \in K[x_1, \dots, x_n]$, $\Sigma = \sigma$ est le spectre du théorème 22 de Stein. Pour $\ell = 1$, $Q_1 = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$ c'est un cas particulier de fraction rationnelle P/Q_1 .

Les cas particuliers dont on a parlé plus haut sont définis de la façon suivante : $P(x_1, \dots, x_n)$ est *homogène en deux monômes* $m_1, m_2 \in K[x_1, \dots, x_n]$ s'il existe $h \in K[u, v]$ homogène de degré $\deg h \geq 2$ tel que

$$P = h(m_1, m_2).$$

De plus si la fraction rationnelle $\frac{m_1}{m_2}$ n'est pas composée alors nous dirons qu'une telle décomposition est *maximale*. Si P est homogène en deux monômes alors il existe une décomposition maximale, cela revient presque à exiger que le degré $\deg h$ est maximal parmi toutes les décompositions homogènes en deux monômes. Par exemple $P(x, y, z) = x^6 - (yz)^4 = h(x, yz)$ avec $h(u, v) = u^6 - v^4$ est une décomposition homogène en deux monômes maximale.

Si P admet une décomposition homogène en deux monômes alors son diagramme de Newton, ou plus précisément le *support* du polynôme $P = \sum a_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$

$$\text{supp}P = \{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}^n \mid a_{i_1, \dots, i_n} \neq 0\}$$

est inclus dans une droite de \mathbb{Z}^n . Cette remarque peut être utilisée ainsi : si le support de P n'est pas inclus dans une droite alors P n'admet aucune décomposition homogène en deux monômes.

3.2 Énoncé

Théorème 27. Soit $P \in K[x_1, \dots, x_n]$ qui n'est ni un monôme, ni une puissance (i.e. $P \neq Q^k$).

1. Quels sont les lieux de réductibilité ?

(a) Si P est homogène en deux monômes : soit $P = h(m_1, m_2)$ une décomposition maximale avec m_1, m_2 deux monômes et h homogène de degré $d \geq 2$. Les lieux de réductibilité sont les parties de

$$\{m_1^k m_2^{d-k} \mid k = 1, \dots, d\}.$$

(b) Si P n'est pas homogène en deux monômes, les lieux de réductibilité, s'ils existent, sont des singletons :

$$\{m^k\}, \quad k > 1.$$

2. Que se passe-t'il si $\{Q_1, \dots, Q_\ell\}$ n'est pas un lieu de réductibilité ?

Pour les autres cas $\{Q_1, \dots, Q_\ell\}$ n'est pas un lieu de réductibilité et $\Sigma \subset K^\ell$ est inclus dans un fermé propre de Zariski. De plus pour tout λ_1 , sauf au plus $(\deg P)^2 - 1$ valeurs, pour tout λ_2 , sauf au plus $(\deg P)^2 - 1$ valeurs,...

$$P + \lambda_1 Q_1 + \dots + \lambda_\ell Q_\ell \quad \text{est irréductible.}$$

Remarque.

1. Pour le cas où P est un monôme et une puissance il existe une version modifiée de ce théorème.

2. Nous avons vu que si le support de P n'est pas inclus dans une droite alors nous sommes dans la situation (1.b). Si de plus $\ell \geq 2$ alors nous sommes directement dans la situation (2).

3.3 Quelques corollaires

Corollaire 28. $P(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$, ($n \geq 2$) est irréductible pour des valeurs génériques de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Nous obtenons aussi des variantes dans l'esprit de Stein du théorème 25

Corollaire 29. Dans les situations suivantes $P + \lambda Q$ est irréductible pour tout λ sauf au plus $\deg(P)^2 - 1$ valeurs.

1. $P \notin K[x_1]$ n'est pas divisible par x_1 et $Q = x_1$.
2. P n'est pas divisible par $x_1 x_2$ et $Q = x_i$ pour $i \in \{1, 2\}$.
3. $n = 2$, $P(x, y) \in K[x, y]$ est homogène de degré $d > 1$ mais n'est pas une puissance et $Q = x^i y^j$ est un monôme de degré $i + j < d$ et $\text{pgcd}(P, Q) = 1$.

Pour prouver ces corollaires nous utilisons aussi les versions du théorème 27 dans lequel P est un monôme ou une puissance.

3.4 Idées de la démonstration

Supposons que $\{Q_1, \dots, Q_\ell\}$ soit un lieu de réductibilité pour P . Appliquons le théorème de Bertini-Krull : cela nous permet d'écrire notre déformation $P + \lambda_1 Q_1 + \dots + \lambda_\ell Q_\ell$ avec $P = h(\phi, \psi)$ et $Q_i = h_i(\phi, \psi)$. Comme les Q_i sont des monômes alors dans le cas général $\phi = m_1$ et $\psi = m_2$ sont des monômes et en plus Q_i est de la forme $m_1^k m_2^{d-k}$. C'est le cas où P est homogène en deux monômes

La difficulté consiste alors à regarder les cas qui justement ne font pas partie du "cas général".

Pour obtenir la description des valeurs de Σ lorsque $\{Q_1, \dots, Q_\ell\}$ n'est pas un lieu de réductibilité de P , nous utilisons d'abord le théorème de Bertini-Noether qui nous donne l'équivalence entre l'irréductibilité d'un polynôme dans $\overline{K(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)[x_1, \dots, x_n]}$ et son irréductibilité dans $K[x_1, \dots, x_n]$ après spécialisation par des valeurs $(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ en dehors d'un fermé propre de Zariski.

Pour avoir la borne numérique, nous raisonnons par récurrence sur $i = 1, \dots, \ell$ en utilisant à chaque pas le théorème 25, pour obtenir que toute valeur de λ_i sauf au plus $(\deg P)^2$ conviennent.

Bibliographie

- [Ar] E. Artal-Bartolo, *Une démonstration géométrique du théorème d'Abhyankar-Moh*. J. Reine Angew. Math. 464 (1995), 97–108.
- [AM] S.S. Abhyankar, T.T. Moh, *Embeddings of the line in the plane*. J. Reine Angew. Math. 276 (1975), 148–166.
- [1] A. Bodin, *Milnor fibration and fibred links at infinity*. Internat. Math. Res. Notices 11 (1999), 615–621.
- [2] A. Bodin, *Classification of polynomials from \mathbb{C}^2 to \mathbb{C} with one critical value*. Math. Z. 242 (2002), 303–322.
- [3] A. Bodin, *Non reality and non connectivity of complex polynomials*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 335 (2002), 1039–1042.
- [4] A. Bodin, *Invariance of Milnor numbers and topology of complex polynomials*. Comment. Math. Helv. 78 (2003), 134–152.
- [5] A. Bodin, *Irregular fibers of complex polynomials in two variables*. Rev. Mat. Complut. 17 (2004), 67–81.
- [6] A. Bodin, *Computation of Milnor numbers and critical values at infinity*. J. Symbolic Comput. 38 (2004), 1417–1427.
- [7] A. Bodin, *Newton polygons and families of polynomials*. Manuscripta Math. 113 (2004), 371–382.
- [8] A. Bodin, M. Tibar, *Topological equivalence of complex polynomials*. Adv. Math. 199 (2006), 136–150.
- [9] A. Bodin, *Jump of Milnor numbers*. Bull. Braz. Math. Soc. 38 (2007), 389–396.
- [10] A. Bodin, A. Pichon, *Meromorphic functions, bifurcation sets and fibred links*. Math. Res. Lett. 14 (2007), 413–422.
- [11] A. Bodin, *Reducibility of rational fractions in several variables*. Israel Journal of Mathematics 164 (2008), 333–347.
- [12] A. Bodin, *Integral points on generic fibers*. Preprint (2007).

- [13] A. Bodin, P. Dèbes, S. Najib, *Irreducibility of hypersurfaces*. À paraître dans *Communications in Algebra*.
- [14] A. Bodin, A. Pichon, J. Seade, *Milnor fibrations of meromorphic functions*. Preprint (2008).
- [D] A. Durfee, *Five definitions of critical point at infinity*. Singularities (Oberwolfach, 1996). Progr. Math. 162, Birkhäuser, Basel (1998), 345–360.
- [EN] D. Eisenbud, W. Neumann, *Three-dimensional link theory and invariants of plane curve singularities*. Annals of Mathematics Studies 110, Princeton University Press (1985).
- [GLM] S. M. Gusein-Zade, I. Luengo, A. Melle-Hernández, *Zeta functions of germs of meromorphic functions, and the Newton diagram*. Funct. Anal. Appl. 32 (1998), 93–99.
- [GP] G. Gwoździwicz, A. Płoski, *On the singularities at infinity of plane algebraic curves*. Rocky Mountain J. Math. 32 (2002), 139–148.
- [HB] D.R. Heath-Brown, *The density of rational points on curves and surfaces*. Ann. of Math. 155 (2002), 553–595.
- [HR] M. Hirasawa and L. Rudolph, *Constructions of Morse maps for knots and links and upper bounds on the Morse-Novikov number*. Preprint (2003).
- [LR] Lê D.T., C.P. Ramanujam, *The invariance of Milnor’s number implies the invariance of the topological type*. Amer. J. Math., 98 (1976), 67–78.
- [LW] Lê D. T., C. Weber, *Équisingularité dans les pinceaux de germes de courbes planes et C^0 -suffisance*. Enseign. Math. 43 (1997), 355–380.
- [Lo] D. Lorenzini, *Reducibility of polynomials in two variables*. J. Algebra 156 (1993), 65–75.
- [Na] S. Najib, *Factorisation des polynômes $P(X_1, \dots, X_n) - \lambda$ et théorème de Stein*. Thèse, Université de Lille 1 (2005).
- [Ma] E. Maillet, *Détermination des points entiers des courbes algébriques unicursales à coefficients entiers*. J. Ecole Polytech. 2, 20 (1919), 115–156.
- [MM] H. Maugendre and F. Michel, *Fibrations associées à un pinceau de courbes planes*. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., 10 (2001), 745–777.
- [Mi] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*. Annals of Mathematics Studies 61, Princeton University Press (1968).
- [NZ] A. Némethi and A. Zaharia, *Milnor fibration at infinity*. Indag. Math. 3 (1992), 323–335.

- [Ne] W.D. Neumann, *Complex algebraic plane curves via their links at infinity*. Invent. Math. 98 (1989), 445–489.
- [NVC] Nguyen Van Chau, *Integer points on a curve and the plane Jacobian problem*. Ann. Polon. Math. 88 (2006), 53–58.
- [P] A. Pichon, *Real analytic germs $f\bar{g}$ and open-book decompositions of the 3-sphere*. Internat. J. Math. 16 (2005), 1–12.
- [PS] A. Pichon and J. Seade, *Fibred multilinks and Singularities $f\bar{g}$* . Preprint (2005).
- [Ru] L. Rudolph, *Embeddings of the line in the plane*. J. Reine Angew. Math. 337 (1982), 113–118.
- [Rup] W. Ruppert, *Reduzibilität ebener Kurven*. J. Reine Angew. Math. 369 (1986), 167–191.
- [Se] J.-P. Serre, *Lectures on the Mordell-Weil theorem*. Aspects of Mathematics, Vieweg 1997.
- [Ti] M. Tibăr, *On the monodromy fibration of polynomial functions with singularities at infinity*. C. R. Acad. Sci. Paris 324 (1997), 1031–1035.
- [Wa] Y. Walkowiak, *Théorème d'irréductibilité de Hilbert effectif*. Acta Arith. 116 (2005), 343–362.