Sur la topologie et l'arithmétique des polynômes

Habilitation à diriger des recherches

Arnaud Bodin

Lille, le 7 juillet 2008

Les polynômes de plusieurs variables

$$P \in K[x, y]$$

- $(P(x, y) = 0)$: courbe algébrique

Les polynômes de plusieurs variables

$$P \in K[x, y]$$

- $(P(x, y) = 0)$: courbe algébrique
- $(P(x, y) = c)_{c \in K}$: famille de courbes

Les polynômes de plusieurs variables

$$P \in K[x, y]$$

- $(P(x, y) = 0)$: courbe algébrique
- $(P(x, y) = c)_{c \in K}$: famille de courbes
- $P : K^2 \longrightarrow K$: application polynomiale

Topologie et arithmétique

$K = \mathbb{C}$, $P : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$

Théorème (Thom)

*Il existe $\mathcal{B}_P \subset \mathbb{C}$ **fini** tel que*

$$P : \mathbb{C}^n \setminus \ P^{-1}(\mathcal{B}_P) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \mathcal{B}_P$$

soit une fibration

Topologie et arithmétique

$K = \mathbb{C}$, $P : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$

Théorème (Thom)

*Il existe $\mathcal{B}_P \subset \mathbb{C}$ **fini** tel que*

$$P : \mathbb{C}^n \setminus \ P^{-1}(\mathcal{B}_P) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \mathcal{B}_P$$

soit une fibration

Les questions classiques :

- Caractériser $\mathcal{B}_P$
- Étudier la *fibre générique* $\mathcal{F}_{gen} = (P = c)$, $c \notin \mathcal{B}_P$
- Étudier les *fibres spéciales* $(P = c)$, $c \in \mathcal{B}_P$

Topologie et arithmétique

K corps
$P(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]$

$$\sigma_P = \left\{\lambda \in K \mid P(x_1, \ldots, x_n) - \lambda \text{ est réductible sur } K\right\}$$

Topologie et arithmétique

K corps
$P(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]$

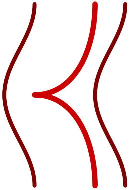
$$\sigma_P = \left\{\lambda \in K \mid P(x_1, \ldots, x_n) - \lambda \text{ est réductible sur } K\right\}$$

Les questions classiques :

- Quand σ_P est-il fini ?
- Calculer $\#\sigma_P$

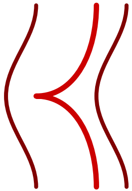
Topologie et arithmétique

$P(x, y) = x^2 - y^3$, $\sigma_P = \varnothing$, $\mathcal{B}_P = \{0\}$

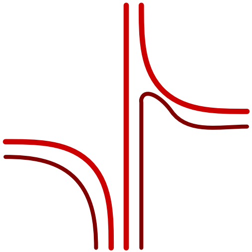


Topologie et arithmétique

$P(x, y) = x^2 - y^3$, $\sigma_P = \varnothing$, $\mathcal{B}_P = \{0\}$



$P(x, y) = x(xy - 1)$, $\sigma_P = \mathcal{B}_P = \{0\}$



Sommaire

Théorème de Lê-Ramanujam

$g_s : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ germe de fonction analytique
$s \in [0,1]$, $n \neq 3$
$\mu(g_s)$ le nombre de Milnor de la singularité isolée à l'origine

Théorème (Lê-Ramanujam)

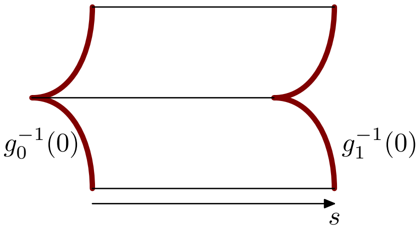
Si $\mu(g_0) = \mu(g_s)$ pour tout $s \in [0,1]$
alors $g_0^{-1}(0)$ et de $g_1^{-1}(0)$ ont le même type topologique

Théorème de Lê-Ramanujam

$g_s : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ germe de fonction analytique
$s \in [0,1]$, $n \neq 3$
$\mu(g_s)$ le nombre de Milnor de la singularité isolée à l'origine

Théorème (Lê-Ramanujam)

Si $\mu(g_0) = \mu(g_s)$ pour tout $s \in [0,1]$
alors $g_0^{-1}(0)$ et de $g_1^{-1}(0)$ ont le même type topologique



Équivalence topologique

Soit $P, Q : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ deux polynômes
Deux polynômes P, Q sont *topologiquement équivalents* s'il existe des homéomorphismes tels que :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{C}^n \\ {\scriptstyle P}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Q} \\ \mathbb{C} & \xrightarrow[\Psi]{} & \mathbb{C} \end{array}$$

P et Q ont les même propriétés topologiques

Déformation

$P_s : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, polynômes avec singularités isolées (en affine et à l'infini)
$s \in [0,1]$, $n \neq 3$

Théorème

Si $\chi(\mathcal{F}_{gen}(s))$, $\#\mathcal{B}(s)$ et $\deg P_s$ sont indépendants de $s \in [0,1]$ alors P_0 et P_1 sont topologiquement équivalents

Applications

- Deux polynômes topologiquement équivalents ne sont pas nécessairement reliés par une famille

Applications

- Deux polynômes topologiquement équivalents ne sont pas nécessairement reliés par une famille
- Un polynôme complexe n'a pas nécessairement une équation réelle à équivalence topologique près

Applications

- Deux polynômes topologiquement équivalents ne sont pas nécessairement reliés par une famille
- Un polynôme complexe n'a pas nécessairement une équation réelle à équivalence topologique près
- Bon comportement des valeurs critiques $\mathcal{B}(s)$ lorsque s varie

Idées de la preuve (I)

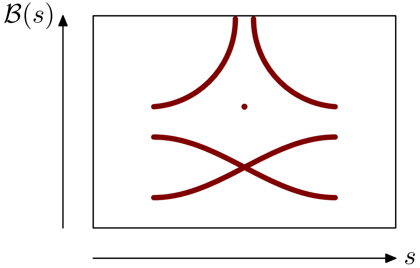
- Invariance des constantes numériques Si $\chi(\mathcal{F}_{gen}(s))$, $\#\mathcal{B}(s)$ et $\deg f_s$ sont constants alors $\#\mathcal{B}_{aff}(s)$, $\#\mathcal{B}_{\infty}(s)$, $\mu(s)$, $\lambda(s)$ le sont aussi

Idées de la preuve (I)

- Invariance des constantes numériques Si $\chi(\mathcal{F}_{gen}(s))$, $\#\mathcal{B}(s)$ et $\deg f_s$ sont constants alors $\#\mathcal{B}_{aff}(s)$, $\#\mathcal{B}_\infty(s)$, $\mu(s)$, $\lambda(s)$ le sont aussi
- Bon comportement des valeurs critiques

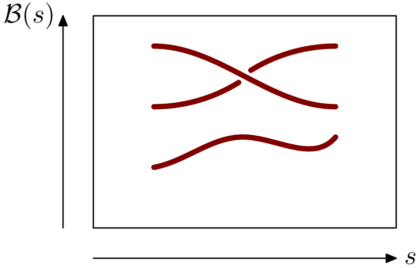
Idées de la preuve (I)

- Invariance des constantes numériques Si $\chi(\mathcal{F}_{gen}(s))$, $\#\mathcal{B}(s)$ et $\deg f_s$ sont constants alors $\#\mathcal{B}_{aff}(s)$, $\#\mathcal{B}_\infty(s)$, $\mu(s)$, $\lambda(s)$ le sont aussi
- Bon comportement des valeurs critiques



Idées de la preuve (I)

- Invariance des constantes numériques Si $\chi(\mathcal{F}_{gen}(s))$, $\#\mathcal{B}(s)$ et $\deg f_s$ sont constants alors $\#\mathcal{B}_{aff}(s)$, $\#\mathcal{B}_\infty(s)$, $\mu(s)$, $\lambda(s)$ le sont aussi
- Bon comportement des valeurs critiques

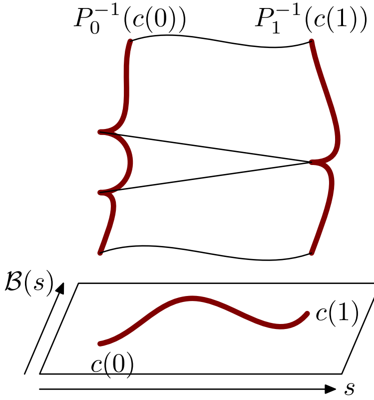


Idées de la preuve (I)

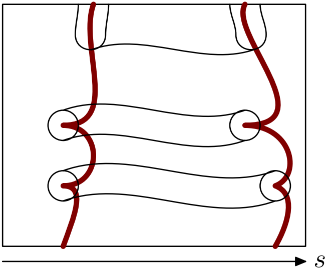
- Invariance des constantes numériques Si $\chi(\mathcal{F}_{gen}(s))$, $\#\mathcal{B}(s)$ et $\deg f_s$ sont constants alors $\#\mathcal{B}_{aff}(s)$, $\#\mathcal{B}_{\infty}(s)$, $\mu(s)$, $\lambda(s)$ le sont aussi
- Bon comportement des valeurs critiques
- Bon comportement des singularités

Idées de la preuve (I)

- Invariance des constantes numériques Si $\chi(\mathcal{F}_{gen}(s))$, $\#\mathcal{B}(s)$ et $\deg f_s$ sont constants alors $\#\mathcal{B}_{aff}(s)$, $\#\mathcal{B}_\infty(s)$, $\mu(s)$, $\lambda(s)$ le sont aussi
- Bon comportement des valeurs critiques
- Bon comportement des singularités

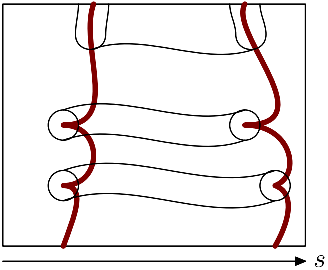


Idées de la preuve (II)



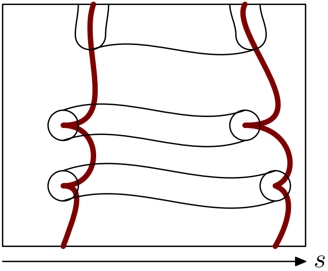
- Trivialisation locale

Idées de la preuve (II)



- Trivialisation locale
- Trivialisation à l'infini

Idées de la preuve (II)



- Trivialisation locale
- Trivialisation à l'infini
- Trivialisation du complément

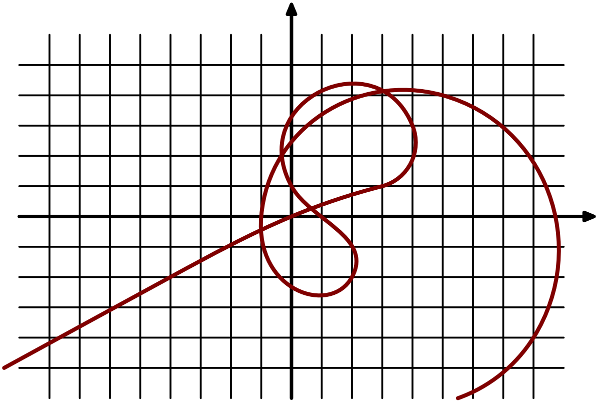
Sommaire

Points entiers

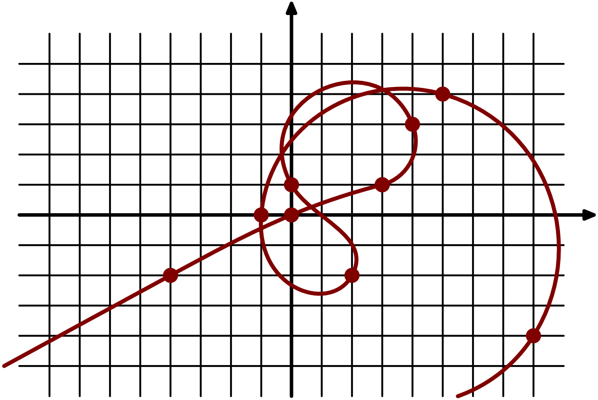
$P \in \mathbb{Q}[x, y]$ un polynôme et $\mathcal{C} = (P(x, y) = 0) \subset \mathbb{C}^2$

$$\mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^2$$

Points entiers



Points entiers



Théorème de Siegel

$P \in \mathbb{Q}[x,y]$ un polynôme et $\mathcal{C} = (P(x,y) = 0) \subset \mathbb{C}^2$ une courbe algébrique irréductible

$$\mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^2$$

Théorème (Siegel)

Si $\mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^2$ est infini alors $\mathcal{C}$ est une courbe rationnelle

Équivalence algébrique

Soit $P, Q \in K[x, y]$
Deux polynômes P, Q sont *algébriquement équivalents* sur K s'il existe $\Phi \in Aut\, K^2$ et $\Psi(z) = \alpha z + \beta$, tels que :

$$\begin{tikzcd} K^2 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "P"'] & K^2 \arrow[d, "Q"] \\ K \arrow[r, "\Psi"'] & K \end{tikzcd}$$

Exemple : $P(x, y) = x - y^d$ est algébriquement équivalent sur K à $Q(x, y) = x$ avec $\Phi(x, y) = (x - y^d, y)$, $\Psi(z) = z$

Points entiers sur les fibres génériques

Théorème

Soit $P \in \mathbb{Q}[x, y]$. *Si*

- $\mathcal{C} = (P(x, y) = k)$ *est une courbe irréductible*
- $k \in \mathbb{Q} \setminus \mathcal{B}_P$ *est une valeur générique*
- $\mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^2$ *est infini*

alors P *est algébriquement équivalent sur* $\mathbb{Q}$ *à*

$$x \qquad \text{ou} \qquad x^2 - qy^2$$

Points entiers sur les fibres génériques

- Réciproquement la courbe $(x = 0)$ a une infinité de points entiers !

Points entiers sur les fibres génériques

- Réciproquement la courbe $(x = 0)$ a une infinité de points entiers !
- La courbe définie par l'équation de Pell $(x^2 - 2y^2 = 1)$ a une infinité de points entiers

Points entiers sur les fibres génériques

- Réciproquement la courbe $(x = 0)$ a une infinité de points entiers !
- La courbe définie par l'équation de Pell $(x^2 - 2y^2 = 1)$ a une infinité de points entiers
- Pour une valeur non générique ce résultat n'est plus valide : exemple $\mathcal{C} = (x^2 - y^3 = 0)$

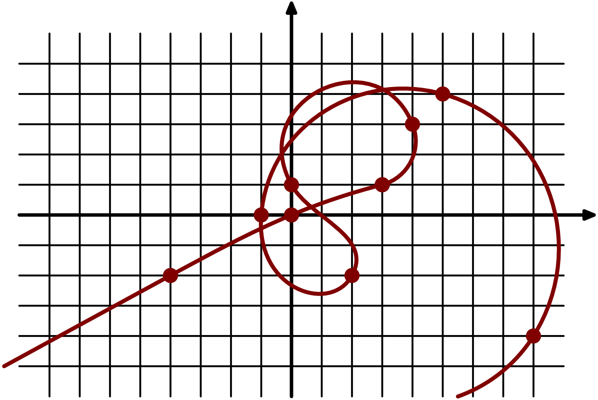
Points entiers sur les fibres génériques

- Réciproquement la courbe $(x = 0)$ a une infinité de points entiers !
- La courbe définie par l'équation de Pell $(x^2 - 2y^2 = 1)$ a une infinité de points entiers
- Pour une valeur non générique ce résultat n'est plus valide : exemple $\mathcal{C} = (x^2 - y^3 = 0)$
- Si $\mathcal{C}$ est réductible alors la conclusion devient $P = h(Q)$, avec $h \in \mathbb{Q}[t]$ et Q algébriquement équivalent à x ou à $x^2 - qy^2$

Nombre de points entiers

Soit $\mathcal{C} = (P(x,y) = 0)$ et $d = \deg P$

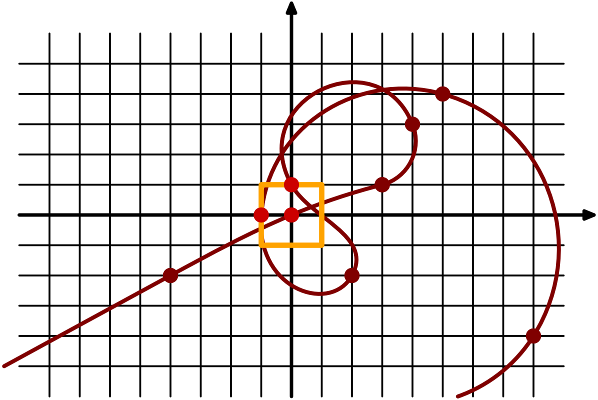
$$N(\mathcal{C}, B) = \#\left\{(x,y) \in \mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^2 \mid |x| \leqslant B \text{ et } |y| \leqslant B\right\}$$



Nombre de points entiers

Soit $\mathcal{C} = (P(x, y) = 0)$ et $d = \deg P$

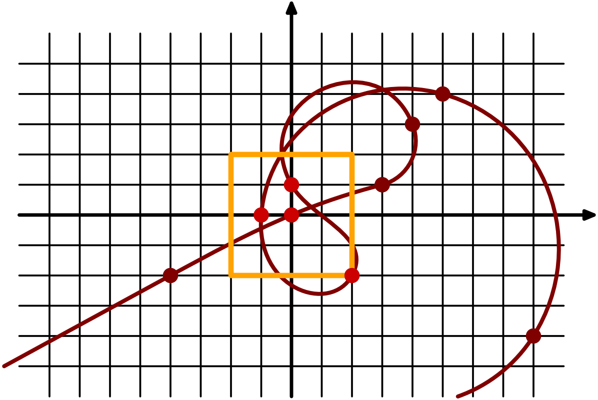
$$N(\mathcal{C}, B) = \#\left\{(x, y) \in \mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^2 \mid |x| \leqslant B \text{ et } |y| \leqslant B\right\}$$



Nombre de points entiers

Soit $\mathcal{C} = (P(x, y) = 0)$ et $d = \deg P$

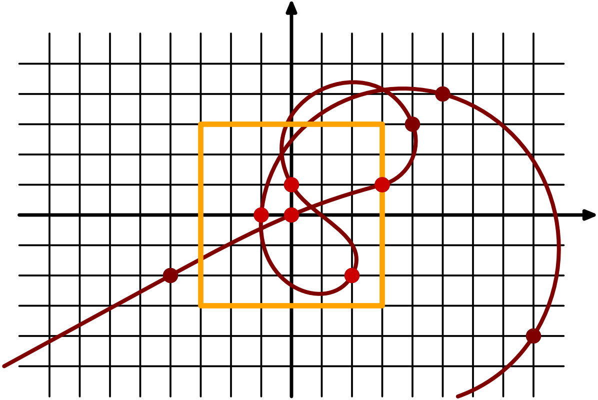
$$N(\mathcal{C}, B) = \#\left\{(x, y) \in \mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^2 \mid |x| \leqslant B \text{ et } |y| \leqslant B\right\}$$



Nombre de points entiers

Soit $\mathcal{C} = (P(x,y) = 0)$ et $d = \deg P$

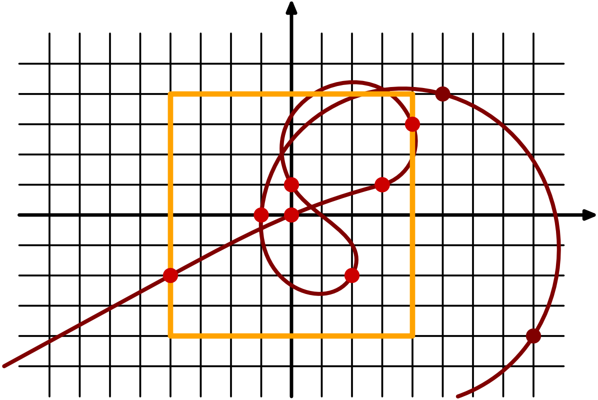
$$N(\mathcal{C}, B) = \#\left\{(x,y) \in \mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^2 \mid |x| \leqslant B \text{ et } |y| \leqslant B\right\}$$



Nombre de points entiers

Soit $\mathcal{C} = (P(x, y) = 0)$ et $d = \deg P$

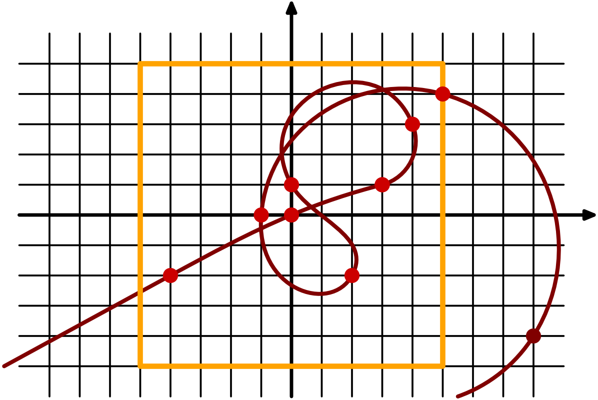
$$N(\mathcal{C}, B) = \#\left\{(x, y) \in \mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^2 \mid |x| \leqslant B \text{ et } |y| \leqslant B\right\}$$



Nombre de points entiers

Soit $\mathcal{C} = (P(x,y) = 0)$ et $d = \deg P$

$$N(\mathcal{C}, B) = \#\left\{(x,y) \in \mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^2 \mid |x| \leqslant B \text{ et } |y| \leqslant B\right\}$$



Théorème de Heath-Brown

Théorème

Pour toute courbe $\mathcal{C}$ irréductible de degré d et tout $B > 0$:

1. *(Heath-Brown)* $N(\mathcal{C}, B) \leqslant c_d B^{\frac{1}{d}+\varepsilon}$
2. *(Walkowiak)* $N(\mathcal{C}, B) \leqslant 2^{48} d^8 \ln(B)^5 B^{\frac{1}{d}}$

Théorème de Heath-Brown

Théorème

Pour toute courbe $\mathcal{C}$ irréductible de degré d et tout $B > 0$:

1. *(Heath-Brown)* $N(\mathcal{C}, B) \leqslant c_d B^{\frac{1}{d}+\varepsilon}$
2. *(Walkowiak)* $N(\mathcal{C}, B) \leqslant 2^{48} d^8 \ln(B)^5 B^{\frac{1}{d}}$

Exemple : $\mathcal{C} = (x - y^d = 0)$ alors $N(\mathcal{C}, B) \sim 2B^{\frac{1}{d}} + 1$

Nombre de points entiers

Soit $\mathcal{C}$ comme dans le théorème une courbe générique ayant une infinité de points entiers.
Cas de l'équation de Pell bien connu : Si $\mathcal{C} = (P = k)$ et P est algébriquement équivalent à $x^2 - qy^2$ alors

$$N(\mathcal{C}, B) \leqslant C \cdot \ln(B)^n$$

Nombre de points entiers

Autre cas : $\mathcal{C}$ admet une paramétrisation polynomiale
soit $(p(t), p'(t))$ une telle paramétrisation à coefficients rationnels
$d = \deg P = \deg p$ et on écrit

$$p(t) = \frac{1}{b}(a_d t^d + a_{d-1} t^{d-1} + \cdots + a_0)$$

Théorème

Le nombre $N(\mathcal{C}, B)$ de points entiers de $\mathcal{C}$ bornés par B, vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B_0 \geqslant 0 \quad \forall B \geqslant B_0 \qquad N(\mathcal{C}, B) \leqslant 2 a_d^{1-\frac{1}{d}} b^{\frac{1}{d}} B^{\frac{1}{d}} + 1 + \varepsilon$$

Exemples

$$N(\mathcal{C}, B) \leqslant 2a_d^{1-\frac{1}{d}} b^{\frac{1}{d}} B^{\frac{1}{d}} + 1 + \varepsilon$$

- $a_d = 1$ et $b = 1$ alors pour B assez grand nous obtenons :

$$N(\mathcal{C}, B) \leqslant 2B^{\frac{1}{d}} + 1 + \varepsilon$$

- $\mathcal{C} = (x - y^d = 1)$ est une courbe où le terme ε est nécessaire

Idées de la preuve (I)

Soit $\mathcal{C} = (P(x,y) - c = 0)$ une courbe générique ayant une infinité de points entiers

- Par le théorème de Siegel $\mathcal{C}$ admet une paramétrisation rationnelle

$$\left(\frac{p(t)}{r(t)}, \frac{q(t)}{r(t)}\right)$$

Idées de la preuve (I)

Soit $\mathcal{C} = (P(x, y) - c = 0)$ une courbe générique ayant une infinité de points entiers

- Par le théorème de Siegel $\mathcal{C}$ admet une paramétrisation rationnelle

$$\left(\frac{p(t)}{r(t)}, \frac{q(t)}{r(t)}\right)$$

- Par un théorème de Maillet soit $r(t) = 1$, soit $r(t) = (\alpha t^2 + \beta t + \gamma)^{\frac{d}{2}}$ avec $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$

Idées de la preuve (I)

Soit $\mathcal{C} = (P(x, y) - c = 0)$ une courbe générique ayant une infinité de points entiers

- Par le théorème de Siegel $\mathcal{C}$ admet une paramétrisation rationnelle

$$\left(\frac{p(t)}{r(t)}, \frac{q(t)}{r(t)}\right)$$

- Par un théorème de Maillet soit $r(t) = 1$, soit $r(t) = (\alpha t^2 + \beta t + \gamma)^{\frac{d}{2}}$ avec $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$
- **Premier cas.** $r(t) = 1$. Comme $\mathcal{C}$ est une fibre générique alors $\mathcal{C}$ est non-singulière donc homéomorphe à $\mathbb{C}$

Idées de la preuve (I)

Soit $\mathcal{C} = (P(x, y) - c = 0)$ une courbe générique ayant une infinité de points entiers

- Par le théorème de Siegel $\mathcal{C}$ admet une paramétrisation rationnelle

$$\left(\frac{p(t)}{r(t)}, \frac{q(t)}{r(t)}\right)$$

- Par un théorème de Maillet soit $r(t) = 1$, soit $r(t) = (\alpha t^2 + \beta t + \gamma)^{\frac{d}{2}}$ avec $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$
- **Premier cas.** $r(t) = 1$. Comme $\mathcal{C}$ est une fibre générique alors $\mathcal{C}$ est non-singulière donc homéomorphe à $\mathbb{C}$
- Par le théorème d'Abhyankar-Moh-Suzuki $P(x, y)$ est algébriquement équivalent sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{Q}$ au polynôme x

Idées de la preuve (II)

- **Deuxième cas.** $r(t) = (\alpha t^2 + \beta t + \gamma)^{\frac{d}{2}}$. Alors $\mathcal{C}$ est homéomorphe à $\mathbb{C}^*$

Idées de la preuve (II)

- **Deuxième cas.** $r(t) = (\alpha t^2 + \beta t + \gamma)^{\frac{d}{2}}$. Alors $\mathcal{C}$ est homéomorphe à $\mathbb{C}^*$
- Par un théorème de Neumann $P(x, y)$ est algébriquement équivalent sur $\mathbb{C}$ à $x^p y^q$ ou à $x^p(yx^r + a_{r-1}x^r + \cdots a_0)^q$

Idées de la preuve (II)

- **Deuxième cas.** $r(t) = (\alpha t^2 + \beta t + \gamma)^{\frac{d}{2}}$. Alors $\mathcal{C}$ est homéomorphe à $\mathbb{C}^*$
- Par un théorème de Neumann $P(x, y)$ est algébriquement équivalent sur $\mathbb{C}$ à $x^p y^q$ ou à $x^p(yx^r + a_{r-1}x^r + \cdots a_0)^q$
- Sur $\mathbb{Q}$, $P(x, y)$ est algébriquement équivalent à

$$x^2 - \ell y^2, x^p y^q, x^p(yx^r + a_{r-1}x^{r-1} + \cdots + a_0)^q$$

Idées de la preuve (II)

- **Deuxième cas.** $r(t) = (\alpha t^2 + \beta t + \gamma)^{\frac{d}{2}}$. Alors $\mathcal{C}$ est homéomorphe à $\mathbb{C}^*$
- Par un théorème de Neumann $P(x, y)$ est algébriquement équivalent sur $\mathbb{C}$ à $x^p y^q$ ou à $x^p(yx^r + a_{r-1}x^r + \cdots a_0)^q$
- Sur $\mathbb{Q}$, $P(x, y)$ est algébriquement équivalent à

$$x^2 - \ell y^2, x^p y^q, x^p(yx^r + a_{r-1}x^{r-1} + \cdots + a_0)^q$$

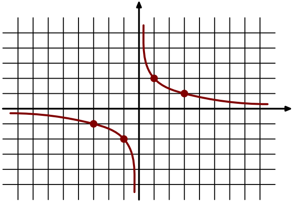
- De plus le points entiers de $\mathcal{C}$ sont envoyés sur des points entiers

Idées de la preuve (II)

- **Deuxième cas.** $r(t) = (\alpha t^2 + \beta t + \gamma)^{\frac{d}{2}}$. Alors $\mathcal{C}$ est homéomorphe à $\mathbb{C}^*$
- Par un théorème de Neumann $P(x, y)$ est algébriquement équivalent sur $\mathbb{C}$ à $x^p y^q$ ou à $x^p(yx^r + a_{r-1}x^r + \cdots a_0)^q$
- Sur $\mathbb{Q}$, $P(x, y)$ est algébriquement équivalent à

$$x^2 - \ell y^2, x^p y^q, x^p(yx^r + a_{r-1}x^{r-1} + \cdots + a_0)^q$$

- De plus le points entiers de $\mathcal{C}$ sont envoyés sur des points entiers
- $P(x, y)$ est algébriquement équivalent sur $\mathbb{Q}$ à $x^2 - \ell y^2$



Sommaire

Théorème de Stein

$P \in K[x,y]$ est *composé*, s'il existe $h \in K[t]$ avec $\deg h \geqslant 2$ et $Q \in K[x,y]$ tel que $P = h \circ Q$

Exemple : le polynôme $P(x,y) = (xy)^2 + xy + 1$ est composé

Théorème (Stein)

Pour $P \in \mathbb{C}[x,y]$ qui n'est pas composé, alors

1. *Le spectre $\sigma_P = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid P(x,y) - \lambda \text{ est réductible}\}$ est fini*
2. $\#\sigma_P < \deg P$

Fractions rationnelles composées

Une fraction rationnelle $f = \frac{P}{Q} \in K(x_1, \ldots, x_n)$ est *composée* s'il existe $g \in K(x_1, \ldots, x_n)$ et $r \in K(t)$ avec $\deg r \geqslant 2$ telles que

$$f = r \circ g$$

$\deg \frac{A}{B} = \max\{\deg A, \deg B\}$

Exemple : la fraction $f(x, y) = \frac{x/y}{x^2/y^2+1}$ est composée

Un théorème de Stein pour les fractions rationnelles

Théorème

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $f = \frac{P}{Q}$ *est composée :* $f = r \circ g$
2. $P - \lambda Q$ *est réductible dans* $K[x_1, \ldots, x_n]$ *pour tout* $\lambda \in K$ *tel que* $\deg P - \lambda Q = \deg f$
3. $P - \lambda Q$ *est réductible dans* $K[x_1, \ldots, x_n]$ *pour une infinité de* $\lambda \in K$

Un théorème de Stein pour les fractions rationnelles

Théorème

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $f = \frac{P}{Q}$ *est composée :* $f = r \circ g$
2. $P - \lambda Q$ *est réductible dans* $K[x_1, \ldots, x_n]$ *pour tout* $\lambda \in K$ *tel que* $\deg P - \lambda Q = \deg f$
3. $P - \lambda Q$ *est réductible dans* $K[x_1, \ldots, x_n]$ *pour une infinité de* $\lambda \in K$

$$\sigma_f = \{\lambda \in K \mid P - \lambda Q \text{ est réductible}\}$$

Un théorème de Stein pour les fractions rationnelles

Théorème

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $f = \frac{P}{Q}$ *est composée :* $f = r \circ g$
2. $P - \lambda Q$ *est réductible dans* $K[x_1, \dots, x_n]$ *pour tout* $\lambda \in K$ *tel que* $\deg P - \lambda Q = \deg f$
3. $P - \lambda Q$ *est réductible dans* $K[x_1, \dots, x_n]$ *pour une infinité de* $\lambda \in K$

$$\sigma_f = \{\lambda \in K \mid P - \lambda Q \text{ est réductible}\}$$

Théorème

Soit $f \in K(x_1, \dots, x_n)$ *une fraction non-composée, alors*

$$\#\sigma_f < (\deg f)^2$$

Déformation des polynômes

"$P(x, y) + \lambda x^{i_0} y^{j_0}$ est irréductible pour tout $\lambda \in K$ sauf un nombre fini et sauf des cas particuliers de P"

Déformation des polynômes

"$P(x, y) + \lambda x^{i_0} y^{j_0}$ est irréductible pour tout $\lambda \in K$ sauf un nombre fini et sauf des cas particuliers de P"

Soit P appartenant à $K[x_1, \ldots, x_n]$. Soient $Q_1, \ldots, Q_\ell \in K[x_1, \ldots, x_n]$ des monômes premiers avec P, $\deg Q_i \leqslant \deg P$

$$\Sigma = \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell) \in K^\ell \mid P + \lambda_1 Q_1 + \cdots + \lambda_\ell Q_\ell \text{ est réductible dans } K[x_1, \ldots, x_n] \right\}$$

$\{Q_1, \ldots, Q_\ell\}$ est un *lieu de réductibilité* pour P si Σ contient un ouvert (non vide) de Zariski

Déformation de polynômes

Théorème

1. ***Quels sont les lieux de réductibilité ?***
   1. *Si $P \in K[x_1, \ldots, x_n]$ est homogène en deux monômes : $P = h(m_1, m_2)$. Les lieux de réductibilité sont les parties de*
   $$\left\{ m_1^k m_2^{d-k} \mid k = 1, \ldots, d \right\}$$
   2. *Si P n'est pas homogène en deux monômes, les lieux de réductibilité, s'ils existent, sont des singletons : $\left\{ m^k \right\}, \quad k > 1$*
2. ***Que se passe-t'il si $\{Q_1, \ldots, Q_\ell\}$ n'est pas un lieu de réductibilité ?***
   $\Sigma \subset K^\ell$ est inclus dans un fermé propre de Zariski. De plus pour tout λ_1, sauf au plus $(\deg P)^2 - 1$ valeurs, pour tout λ_2, sauf au plus $(\deg P)^2 - 1$ valeurs,...,
   $$P + \lambda_1 Q_1 + \cdots + \lambda_\ell Q_\ell \quad \textit{est irréductible}$$

Exemple

Corollaire

$P(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$, ($n \geqslant 2$) est irréductible pour des valeurs génériques de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Merci !