

THÈSE
présentée en vue de l'obtention du
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER — TOULOUSE III
LABORATOIRE ÉMILE PICARD
par

Arnaud Bodin

Fibres et entrelacs irréguliers à l'infini

Soutenue le 1^{er} décembre 2000, devant le jury composé de :

Pierrette Cassou-Noguès	professeur, université Bordeaux I	examinatrice
Thomas Fiedler	professeur, université Toulouse III	examineur
Lê Dũng Tráng	professeur, université Aix-Marseille I	rapporteur
Françoise Michel	professeur, université Toulouse III	directrice
Lee Rudolph	professeur, Clark University (Worcester, MA)	rapporteur
Mark Spivakovsky	directeur de recherche, université Toulouse III	examineur

Fibres et entrelacs irréguliers à l'infini

Arnaud Bodin

Remerciements

Je remercie en premier lieu Françoise Michel à qui cette thèse doit beaucoup. Son enthousiasme, sa gentillesse et sa clairvoyance ont rendu ce travail des plus plaisants.

Lee Rudolph et Lê Dũng Tráng m'ont fait l'honneur d'accepter de rapporter ce travail et de participer au jury. Je les en remercie vivement.

J'exprime toute ma reconnaissance à Pierrette Cassou-Noguès, Thomas Fiedler et Mark Spivakovsky qui ont accepté de prendre part au jury.

Ma gratitude va également à Michel Boileau pour son écoute patiente et ses encouragements.

Un grand merci à mes parents, ma sœur Sandrine, Cyril, sans oublier Victor et Abel. Merci aussi à tous les occupants passés et présents de la salle 6 pour l'ambiance chaleureuse qu'ils ont su créer. J'adresse enfin toute mon affection à Stéphanie qui m'a soutenu tout au long de ces trois années.

Sommaire

Introduction	1
Petit historique	1
Énoncés des principaux résultats	2
1 Préliminaires	7
1 Valeurs irrégulières à l'infini	7
2 Résolution à l'infini	8
3 Caractérisation des valeurs irrégulières	11
4 Multi-entrelacs et fibration	12
2 Fibration de Milnor à l'infini	15
1 Fibrations de Milnor	15
2 Fibration du multi-entrelacs $f^{-1}(0) \cap S_R^3$	17
3 Topologie de la fibre de Milnor	21
3 Entrelacs non fibrés	25
1 Un résultat de Neumann et Rudolph	25
2 L'application de Milnor n'est pas une fibration	26
3 Non fibration	29
4 Premières applications	35
1 Polynômes semi-modérés	35
2 Fibre de Milnor vs fibre générique	36
3 Cas des polynômes non réduits	40
4 Nombre de Milnor à l'infini	43

5	Monodromie des entrelacs à l'infini	45
1	Monodromies	45
2	Calcul du polynôme caractéristique	46
3	Calcul des twists	48
4	Exemples	51
6	Fibre irrégulière dans le tube	55
1	Étude du tube	55
2	Fibre irrégulière dans le tube	57
3	Injectivité et surjectivité de j_c	60
7	Cycles invariants	65
1	Diagramme jkl	65
2	Un théorème des cycles invariants	66
3	Cas de la dimension 2	67
8	Cycles évanescents	73
1	Fibre générique dans le tube	73
2	Cycles évanescents pour une valeur propre $\lambda \neq 1$	76
3	Cycles évanescents pour la valeur propre $\lambda = 1$	77
4	Cycles évanescents et filtration de $H_1(F_{gen})$	80
5	Non semi-simplicité	83
9	Polynômes ayant une seule valeur irrégulière	87
1	Introduction	87
2	Preliminaires	89
3	Généralisation du théorème de Zaïdenberg-Lin	91
4	Cas $B_{aff} = \emptyset$ et $B_\infty = \{0\}$	94
5	Cas $B_{aff} = \{0\}$ et $B_\infty = \{0\}$	97
6	Classification topologique	99
	Bibliographie	105

Introduction

L'objet de ce travail est l'étude des entrelacs et des fibres pour les valeurs irrégulières à l'infini des polynômes complexes. Définissons tout d'abord la notion de régularité à l'infini. Une valeur $c \in \mathbb{C}$ est *régulière à l'infini* pour le polynôme $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ s'il existe un disque \mathcal{D} centré en c et un compact \mathcal{C} de \mathbb{C}^2 tels que f induise une fibration localement triviale $f : f^{-1}(\mathcal{D}) \setminus \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. Les valeurs qui ne vérifient pas cette condition sont les *valeurs irrégulières à l'infini*. Avant de présenter les résultats de ce travail nous commençons par un petit aperçu historique des notions qui sont à la base de cette thèse.

Petit historique

La notion de valeur irrégulière ou de valeur critique apparaît dans les travaux de R. Thom avant 1970. Pour un polynôme f de n variables complexes il existe un ensemble fini B de valeur critique tel induise une fibration localement triviale au-dessus de $\mathbb{C} \setminus B$. En 1974 dans [Su_{s4}⁹], M. Suzuki prouve l'égalité suivante (nommée depuis formule de Suzuki) : $\chi(f^{-1}(c)) - \chi(f^{-1}(s)) = \mu(c) + \lambda(c)$ avec $s \notin B$, $\mu(c)$ et $\lambda(c)$ des entiers positifs ou nuls du type nombres de Milnor. Plus tard¹ en 1983, S. Broughton remarque dans [Br_{s3}³] que le polynôme $x(xy + 1)$ n'a pas de valeur critique affine (car le gradient ne s'annule jamais) mais que $B = \{0\}$. L'idée de retrouver B comme l'union des valeurs critiques affines et d'autres valeurs est obtenue par Hà H.V. et Lê D.T. dans [HL_{s4}¹⁹] avec la décomposition (implicite) $B = B_{\text{aff}} \cup B_{\infty}$. La définition explicite de valeur irrégulière à l'infini telle que nous l'avons définie

¹Il semble que l'article de M. Suzuki ne soit pas très connu à la fin des années 70 ni au début des années 80. Notons aussi que dans cet article figure une démonstration du théorème d'Abhyankar-Moh avant l'heure et même si Suzuki la pensait incomplète la partie manquante existait mais n'avait pas été publiée (voir la fin de [HL_{s4}¹⁹]).

n'apparaît cependant que dans [NR¹⁹].

C'est dans [Ru³²] que L. Rudolph introduit la notion d'entrelacs à l'infini $K_c = f^{-1}(c) \cap S_R^3$ (avec S_R^3 une sphère de dimension 3 et de rayon très grand) afin de donner une nouvelle preuve du théorème d'Abhyankar-Moh. L'étude des entrelacs à l'infini des fibres régulières sera entreprise ensuite par W. Neumann et L. Rudolph dans [NR¹⁹] pour redémontrer le théorème de Zaïdenberg-Lin qui est une généralisation du théorème d'Abhyankar-Moh ; ensuite dans [Ne¹⁹] commence l'étude systématique des entrelacs à l'infini à l'aide des *splice diagrams*.

L'utilisation de la résolution des singularités à l'infini pour l'étude de certains polynômes apparaît déjà dans le travail de M. Miyanishi et T. Sugie [MS³⁸] pour leur classification des polynômes de type simple. Ultérieurement, Lê D.T. et C. Weber introduisent de nouveau la résolution des singularités à l'infini en rapport avec la conjecture jacobienne, voir [LW³⁴] et [LW³⁵]. C'est alors qu'apparaissent les notions de composantes dicritiques et de bambous pour la résolution des singularités à l'infini des polynômes.

Énoncés des principaux résultats

Fibration de Milnor et entrelacs à l'infini

Les entrelacs locaux des singularités isolées de germes de courbes planes sont des entrelacs fibrés : ce résultat est connu depuis le travail de J. Milnor sur les singularités d'hypersurfaces [Mi⁶⁸]. La fibration des entrelacs à l'infini a été étudiée à plusieurs reprises selon différents points de vue ([NR¹⁹], [Ne¹⁹], [NZ¹²]). Dans les chapitres 2 et 3, nous montrons le résultat suivant, pour un polynôme $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$:

Théorème. Soit $K_0 = f^{-1}(0) \cap S_R^3$. Il existe une fibration de $S_R^3 \setminus K_0$ sur le cercle si et seulement si l'ensemble des valeurs irrégulières à l'infini de f est vide ou réduit à $\{0\}$.

Lorsque f n'est pas un polynôme réduit la fibration de $S_R^3 \setminus K_0$ est une fibration en multi-entrelacs et K_0 est un multi-entrelacs fibré. Pour l'application de fibration nous pouvons choisir $f/|f|$ (début du chapitre 4). Enfin contrairement au cas local, la fibre de Milnor et la fibre générique ne sont pas difféomorphes : si f est polynôme réduit et si l'entrelacs K_0 est fibré à l'infini alors il existe un plongement de la fibre générique $f^{-1}(s)$, $s \notin B$ dans la fibre de Milnor $(f/|f|)^{-1}(e^{i\theta})$; ce plongement est une équivalence d'homotopie si et seulement si le polynôme f n'a pas de valeur irrégulière à l'infini.

En application de ces résultats et des méthodes employées, nous obtenons au chapitre 5 le polynôme caractéristique associé à la fibration de cet entrelacs ainsi que les valeurs des twists de cette monodromie. Par exemple le twist qui correspond à une composante dicritique de degré d et de classe d'Euler $-e$ est $\frac{-e}{d}$ alors que le twist qui correspond à l'intersection de deux composantes de multiplicité m et m' est $\frac{+1}{\text{ppcm}(|m|, |m'|)}$. Il est intéressant de noter que ces twists sont négatifs au niveau des composantes dicritiques et positifs ailleurs.

Fibres irrégulières

Nous supposons que le polynôme $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ a des singularités affines isolées. Notons T_c le *tube* pour la valeur c , $T_c = f^{-1}(D_\varepsilon^2(c))$ (ε suffisamment petit) : c'est un voisinage de la fibre $F_c = f^{-1}(c)$. La *partie lisse* F_c° de F_c est obtenue en retirant un voisinage des singularités affines à $F_c \cap B_R^{2n}$. Alors F_c° peut être plongé dans une fibre générique voisine F_{gen} . On étudie le diagramme commutatif qui relie F_c° , F_{gen} , et T_c :

$$\begin{array}{ccc} H_q(F_c^\circ) & \xrightarrow{j_c^\circ} & H_q(T_c) \\ \ell_c \downarrow & \nearrow k_c & \\ H_q(F_{gen}) & & \end{array}$$

avec j_c° et k_c induits par l'inclusion et ℓ_c par le plongement. Nous notons enfin h_c la monodromie induite sur $H_q(F_{gen})$ par un petit cercle centré en c . Nous énonçons deux résultats sur les cycles invariants. Le premier généralise un théorème de F. Michel et C. Weber [MW²⁰] aux polynômes ayant n variables complexes, toujours sous l'hypothèse de singularités affines isolées et nous obtenons (voir le chapitre 7) :

Cycles invariants locaux. $\text{Ker}(h_c - id) = \ell_c(H_q(F_c^\circ))$.

Nous donnons également la dimension de $\text{Ker}(h_c - id)$ dans certains cas. Le second résultat concerne les cycles invariants par les monodromies h_c pour tout $c \in B$ dans le cas $n = 2$: $\bigcap_{c \in B} \text{Ker}(h_c - id)$. Ce résultat a été également indépendamment obtenu par [BM²⁰] et est aussi implicitement contenu dans [DN²⁰].

Cycles invariants globaux. Chaque composante dicritique produit exactement un cycle invariant par toutes les monodromies. Réciproquement l'ensemble de ces cycles engendre les cycles invariants par toutes les monodromies.

Nous supposons désormais $n = 2$. Nous généralisons un résultat de [ACD¹⁹] sur l'étude du morphisme j_c induit en homologie par l'inclusion de F_c dans T_c . Nous supposons que la fibre générique est connexe et que la fibre F_c est réduite.

Théorème. j_c est un isomorphisme si et seulement si c est une valeur régulière à l'infini.

En fait nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour que j_c soit injectif (puis surjectif). Soit G_c le graphe dual de $F_c = f^{-1}(c)$ et soit \bar{G}_c le graphe dual d'une compactification de F_c obtenue à l'aide de la résolution à l'infini de f . Nous obtenons $\dim \text{Ker } j_c = n(F_c) - 1 + \dim H_1(\bar{G}_c) - \dim H_1(G_c)$ où $n(F_c)$ est le nombre de composantes connexes de F_c . Donc j_c est injectif si et seulement si F_c est connexe et $H_1(G_c)$ est isomorphe à $H_1(\bar{G}_c)$.

Nous étudions au chapitre 8 les *cycles évanescents* $V_c = \text{Ker } k_c$ pour $c \in B$. L'homologie est à coefficients complexes. Nous montrons qu'il existe une décomposition $H_1(F_{gen}) = \text{Ker}(h_c - id)^2 \oplus \Lambda$ avec les cycles de Λ qui sont des cycles évanescents pour la valeur c . L'étude des cycles évanescents appartenant à $\text{Ker}(h_c - id)^2$ est plus délicate ; nous prouvons que les cycles évanescents de $\text{Ker}(h_c - id)^2$ sont en fait des cycles de $\text{Ker}(h_c - id)$, nous donnons une description de ces cycles invariants et évanescents $K_c = V_c \cap \text{Ker}(h_c - id)$. L'espace K_c est très différent de l'espace K'_c correspondant pour la cohomologie. Nous obtenons d'abord $K_c = \ell_c(\text{Ker } j_c^\circ)$ et nous décrivons ensuite K_c à l'aide d'une filtration de $H_1(F_{gen})$ obtenue à partir de la résolution de f . Nous calculons ainsi le nombre de cycles invariants et évanescents : $\dim K_c = r(F_c) - 1 + \dim H_1(\bar{G}_c)$ où $r(F_c)$ est le nombre de composantes irréductibles de $F_c = f^{-1}(c)$. De cette façon, pour une base fixée (et donc indépendante de $c \in B$), compatible avec la décomposition de Broughton $H_1(F_{gen}) = \bigoplus_{c \in B} V_c$, nous obtenons la description de la sous-matrice de h_c correspondant à V_c .

Classification des polynômes avec une seule valeur irrégulière

Dans le dernier chapitre nous classifions à homéomorphismes près les polynômes réduits à deux variables complexes n'ayant qu'une seule valeur irrégulière. Plus précisément deux polynômes f et g sont *topologiquement équivalents* s'il existe des homéomorphismes Φ et Ψ tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{C}^2 \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{C}. \end{array}$$

La classification est donnée par le tableau :

	$B_{\text{aff}} = \emptyset$	$B_{\text{aff}} = \{0\}$
$B_{\infty} = \emptyset$	x	$yg_{\text{red}}(x)$ or $x \prod_{i=1}^n (x^p - iy)$ or $x^{\varepsilon} y^{\varepsilon'} \prod_{i=1}^n (x^p - iy^q)$
$B_{\infty} = \{0\}$	$x \prod_{i=1}^n (x^p y^q - i)$ or $x \sigma \prod_{i=1}^n (x^p \sigma^q - i)$ or $x \sigma^{\varepsilon} \prod_{i=1}^n (x^p - i \sigma^q)$ or $g_{\text{red}}(x)(g(x)y + 1)$	$xy \prod_{i=1}^n (x^p y^q - i)$ or $g_{\text{red}}(x)k(x)(g(x)y + 1)$

avec p et q des entiers premiers entre eux, $\sigma = \sigma(x, y) = x^s y + 1$, $g(x) = \prod_{i=1}^n (x - i)^{m_i}$, $g_{\text{red}}(x) = \prod_{i=1}^n (x - i)$, $k(x) = \prod_{i=1}^{n'} (x + i)$. Les notations sont explicitées en détails dans le chapitre 9. Cette classification est complète dans le sens où deux polynômes de cette liste ne sont pas topologiquement équivalents.

Préliminaires

Commençons en rappelant la définition suivante : soit M, N des variétés C^∞ et $\psi : M \rightarrow N$ une application C^∞ surjective. ψ est une *fibration localement triviale* si, quelque soit $x \in N$, il existe un ouvert $U \subset N$ contenant x tel que $\psi^{-1}(U)$ soit difféomorphe à $\psi^{-1}(x) \times U$, avec le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \psi^{-1}(U) & \xrightarrow{\cong} & \psi^{-1}(x) \times U \\ & \searrow \psi & \downarrow pr_U \\ & & U \end{array}$$

1 Valeurs irrégulières à l'infini

1.1 Motivations

Le polynôme de Broughton $f(x, y) = x(xy + 1)$ n'a pas de valeur critique affine, *i.e.* $\text{grad } f$ ne s'annule jamais. Cependant les fibres $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(1)$ ne sont pas homéomorphes : $f^{-1}(0)$ est topologiquement l'union d'un plan (une droite complexe) et d'un anneau alors que $f^{-1}(1)$ est un anneau. Par contre pour λ et λ' deux valeurs non nulles, les fibres $f^{-1}(\lambda)$ et $f^{-1}(\lambda')$ sont homéomorphes. En fait la fonction

$$f : \mathbb{C}^2 \setminus f^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

est une fibration localement triviale.

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.1 (Thom). Pour un polynôme $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ il existe un ensemble fini B de points de \mathbb{C} tel que

$$f : \mathbb{C}^2 \setminus f^{-1}(B) \rightarrow \mathbb{C} \setminus B$$

soit une fibration localement triviale.

Bien sûr, l'ensemble

$$B_{\text{aff}} = \{f(x, y) \mid \text{grad } f(x, y) = 0\}$$

des *valeurs critiques affines* est inclus dans B mais comme le montre le polynôme de Broughton cette inclusion peut être stricte. Il se peut que deux portions de fibre $f^{-1}(\lambda) \setminus \mathcal{C}$ et $f^{-1}(\lambda') \setminus \mathcal{C}$ (pour $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}$) soient topologiquement différentes pour tout ensemble compact (même grand) \mathcal{C} de \mathbb{C}^2 . Il faut donc étudier le comportement des fibres « à l'infini ».

1.2 Définitions

Soit $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ un polynôme en deux variables complexes. $c \in \mathbb{C}$ est une *valeur régulière à l'infini* pour f s'il existe un disque \mathcal{D} centré en c et un compact \mathcal{C} de \mathbb{C}^2 tels que

$$f : f^{-1}(\mathcal{D}) \setminus \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

soit une fibration localement triviale.

Il n'existe qu'un nombre fini de valeurs qui ne sont pas régulières à l'infini : ce sont les *valeurs irrégulières* (ou *critiques*) à l'infini de f . Nous noterons B_∞ l'ensemble des valeurs irrégulières à l'infini de f .

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat suivant :

Théorème 1.2 (Hà-Lê). L'ensemble minimal B tel que

$$f : \mathbb{C}^2 \setminus f^{-1}(B) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus B$$

soit une fibration localement triviale est

$$B = B_{\text{aff}} \cup B_\infty.$$

Les ensembles B_{aff} et B_∞ ne sont pas nécessairement disjoints. Un *polynôme bon* est un polynôme sans valeur critique à l'infini. Une fibre $F_c = f^{-1}(c)$ est une *fibre irrégulière* si $c \in B$, et si $s \notin B$, $F_s = f^{-1}(s)$ est une *fibre générique* notée F_{gen} .

2 Résolution à l'infini

2.1 Compactification

Prenons $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ un polynôme de degré n . Décomposons f en somme de polynômes homogènes

$$f = \sum_{i=0}^n f_i$$

avec f_i un polynôme homogène de degré i . Nous homogénéisons le polynôme f en

$$F(x, y, z) = z^n f(x/z, y/z) = \sum_{i=0}^n f_i(x, y) z^{n-i}.$$

En considérant $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et l'inclusion de \mathbb{C}^2 dans $\mathbb{C}P^2$ donnée par $(x, y) \mapsto (x : y : 1)$ avec $L_\infty = (z = 0)$ la droite à l'infini de $\mathbb{C}P^2$, nous définissons une application

$$\tilde{f} : \mathbb{C}P^2 \longrightarrow \mathbb{C}P^1$$

avec

$$\tilde{f}(x:y:z) = (F(x:y:z) : z^n).$$

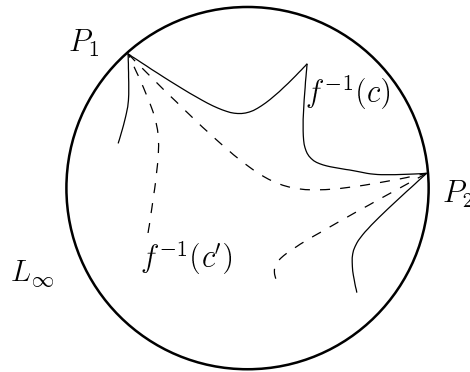


Fig. 1 – Points d'indétermination

L'application \tilde{f} prolonge f mais elle n'est pas partout définie sur L_∞ . Les points d'indétermination sont en nombre fini :

$$H_\infty = (f_n = 0) \cap (z = 0).$$

2.2 Différentes résolutions

Résolution faible. Il existe une suite finie minimale d'éclatements¹ $\pi_f : \Sigma_f \longrightarrow \mathbb{C}P^2$ au-dessus des points de H_∞ , où Σ_f est une surface lisse et telle que $\phi_f = \tilde{f} \circ \pi_f$ s'étende en un morphisme bien défini de Σ_f sur $\mathbb{C}P^1$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}P^2 & \xleftarrow{\pi_f} & \Sigma_f \\ f \downarrow & & \tilde{f} \downarrow & \swarrow \phi_f & \\ \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}P^1 & & \end{array}$$

¹L'indice f est pour « faible ».

Nous parlerons de la *résolution faible* de f à l'infini. Pour une composante irréductible D de $\pi_f^{-1}(L_\infty)$ nous considérons les trois cas possibles suivants :

1. $\phi_f(D) = \infty$, et notons $D_\infty = \phi_f^{-1}(\infty)$.
2. $\phi_f(D) = \mathbb{C}P^1$, D est une *composante dicritique* et la restriction de ϕ_f à D est un revêtement ramifié, le *degré* de D est l'ordre de cette restriction. Le *diviseur dicritique*² D_{dic} est le lieu associé à l'ensemble des composantes dicritiques.
3. $\phi_f(D) = c \in \mathbb{C}$, nous noterons l'union de telles composantes par $D_{crit} = D_{c_1} \cup \dots \cup D_{c_g}$.

Les valeurs irrégulières à l'infini de f sont les valeurs c_1, \dots, c_g et les valeurs critiques de la restriction de ϕ_f à D_{dic} ; de plus chaque diviseur D_{c_i} est une union disjointe de bambous³.

Résolution partielle. Comme nous venons de le voir, il peut rester des singularités. Nous augmentons le nombre d'éclatements de π_f (toujours de façon minimale) pour obtenir $\pi_p : \Sigma_p \longrightarrow \mathbb{C}P^2$ et $\phi_p = \tilde{f} \circ \pi_p : \Sigma_p \longrightarrow \mathbb{C}P^1$ afin que la fibre $\phi_p^{-1}(0)$ soit un diviseur à croisements normaux et coupe transversalement D_{dic} . C'est la *résolution partielle* de f pour la valeur $c = 0$.

Résolution totale. De nouveau, nous augmentons le nombre d'éclatements afin de résoudre toutes les fibres : nous obtenons π_t, Σ_t, ϕ_t avec toutes les fibres de ϕ_t qui sont des diviseurs à croisements normaux et qui rencontrent transversalement le lieu D_{dic} . C'est la *résolution totale*.

Pour la résolution totale, les valeurs $c_1, \dots, c_{g'}$ qui proviennent des composantes D du nouveau $D_{crit} = D_{c_1} \cup \dots \cup D_{c_{g'}}$ (composé des D tels que $\phi_t(D)$ est fini) sont les valeurs irrégulières à l'infini.

2.3 Équations locales

La résolution totale permet d'avoir des équations locales simples (à isomorphisme près) de ϕ_t (voir [Fo96]). Nous donnons une équation locale du diviseur ainsi qu'une équation locale de ϕ_t .

1. diviseur ($v = 0$), $\phi_t(u, v) = u$;
2. diviseur ($uv = 0$), $\phi_t(u, v) = u^p$;

²C'est un abus de langage car la multiplicité naturelle associée à une composante du diviseur dicritique est 0.

³Un bambou est un diviseur dont toutes les composantes sont de valence ≤ 2 : *i.e.* moins de 2 voisins.

3. diviseur $(v = 0)$, $\phi_t(u, v) = v^q$;
4. diviseur $(uv = 0)$, $\phi_t(u, v) = u^p v^q$;
5. diviseur $(v = 0)$, $\phi_t(u, v) = u^p v^q$.

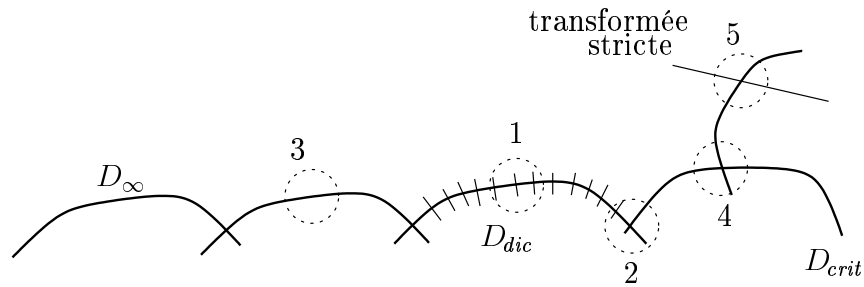


Fig. 2 – Équations locales de la résolution totale

3 Caractérisation des valeurs irrégulières

Il existe différentes caractérisations des valeurs irrégulières à l'infini. En voici quelques-unes (voir [Du⁹³]) :

Théorème 1.3. Soit $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ une application polynomiale de degré n . Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $c \in \mathbb{C}$ est une valeur irrégulière à l'infini de f .
2. Il existe un point $p \in H_\infty$ où la famille de germes $f(x, y) = tz^n$ n'est pas équisingulière en $t = c$.
3. Il existe une suite $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{C}^2 telle que $\|z_k\| \rightarrow \infty$, $\text{grad } f(z_k) \rightarrow 0$ et $f(z_k) \rightarrow c$ lorsque $k \rightarrow \infty$.
4. Pour la résolution faible de f , $D_c \neq \emptyset$ ou c est une valeur critique de la restriction de ϕ_f à D_{dic} .
5. Pour la résolution totale de f , $D_c \neq \emptyset$.

Nous donnons aussi la formule de Suzuki pour un polynôme $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ à singularités isolées :

Théorème 1.4 (Suzuki). Pour $s \notin B$, et $c \in \mathbb{C}$:

$$\chi(f^{-1}(c)) - \chi(f^{-1}(s)) = \mu(c) + \lambda(c)$$

avec χ désignant la caractéristique d'Euler, $\mu(c)$ est la somme des nombres de Milnor locaux des singularités affines de la fibre $f^{-1}(c)$; $\lambda(c)$ est le nombre de Milnor à l'infini. Alors $c \in B_\infty$ si et seulement si $\lambda(c) > 0$, et $c \in B_{\text{aff}}$ si et seulement si $\mu(c) > 0$.

4 Multi-entrelacs et fibration

4.1 Entrelacs, multi-entrelacs

Un *entrelacs* $L = (L_1, \dots, L_n)$ est l'union disjointe de courbes fermées simples d'une variété de dimension 3 compacte, connexe, orientée. Lorsque l'on choisit une orientation de ces courbes, on parle d'*entrelacs orientés*.

Un *multi-entrelacs* $L(\bar{m})$ est un entrelacs $L = (L_1, \dots, L_n)$ auquel on associe des entiers $\bar{m} = (m_1, \dots, m_n)$. m_i est la *multiplicité* de L_i .

4.2 Fibration des multi-entrelacs

Soit M une variété de dimension 3 compacte connexe orientée et L un entrelacs de M . Soit $\psi : M \setminus L \longrightarrow S^1$ une fibration localement triviale. ψ est une *fibration en livre ouvert* (de *reliure* L) si pour toute composante connexe K de L il existe un voisinage tubulaire fermé $\mathcal{U}(K)$ et une trivialisaton $\alpha : \mathcal{U}(K) \longrightarrow D^2 \times S^1$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}(K) \setminus K & \xrightarrow{\alpha|} & D^2 \setminus \{0\} \times S^1 \\ & \searrow \psi| & \downarrow \theta \\ & & S^1 \end{array}$$

où $\alpha|$ et $\psi|$ sont les restrictions de α et ψ à $\mathcal{U}(K) \setminus K$ et $\theta : D^2 \setminus \{0\} \times S^1 \longrightarrow S^1$ est définie par $\theta(z, t) = \frac{z}{|z|}$.

Nous généralisons cette définition pour un multi-entrelacs $L(\bar{m})$; $\psi : M \setminus L \longrightarrow S^1$ est une *fibration en multi-entrelacs* si, comme ci-dessus, ψ est une fibration localement triviale, avec pour chaque composante K de L une trivialisaton α et une application θ définie par $\theta(z, e^{i\lambda}) = e^{\frac{ik\lambda}{m}} \frac{z^m}{|z^m|}$ où m est la multiplicité de K et $k \in \{0, \dots, m-1\}$. Cela revient à exiger que chaque surface $\psi^{-1}(x)$ arrive sur la composante K dans m directions (avec $m \neq 0$). Par convention si $m = 0$, $\psi^{-1}(x)$ coupe transversalement un voisinage tubulaire de K en une union de disques transverses. Un multi-entrelacs est *fibré* s'il admet une fibration en multi-entrelacs. Une

surface \mathcal{F} avec $\partial\mathcal{F} = L$, qui se comporte dans un voisinage tubulaire de L comme $\psi^{-1}(x)$ ci-dessus, est une *surface de Seifert* pour le multi-entrelacs L . Un entrelacs orienté peut-être considéré comme un multi-entrelacs avec des poids tous égaux à 1.

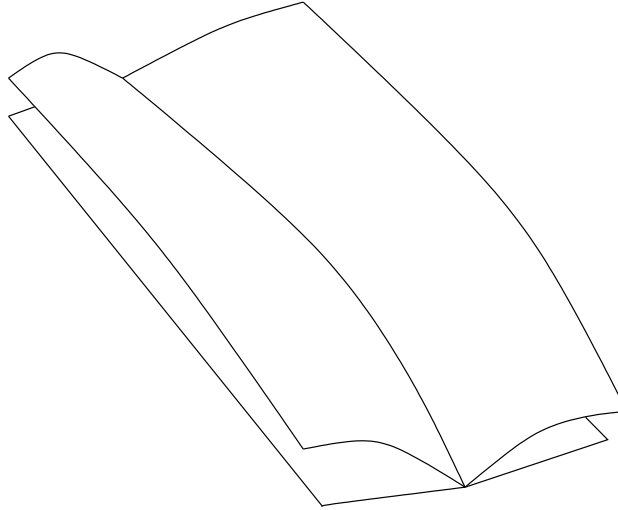


Fig. 3 – Fibration en multi-entrelacs

Sur la figure 3, une portion de fibre d'une fibration en multi-entrelacs est dessinée dans un voisinage d'un nœud de multiplicité 4.

4.3 Entrelacs et multi-entrelacs à l'infini

Soit $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ une application polynomiale. Nous noterons

$$B_r^4 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 \leq r^2\}$$

et

$$S_r^3 = \partial B_r^4 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = r^2\}.$$

Pour $c \in \mathbb{C}$, il existe un nombre fini de valeurs $r_0 = 0 < r_1 < \dots < r_s < r_{s+1} = +\infty$ telles que l'intersection de $f^{-1}(c)$ avec S_r^3 ne soit pas transverse. Pour $r \in]r_i, r_{i+1}[$, $K_{c,r} = f^{-1}(c) \cap S_r^3$ est un entrelacs de S_r^3 ; de plus par le théorème de la structure conique de Milnor [Mi88], le type topologique de l'entrelacs est indépendant de $r \in]r_i, r_{i+1}[$.

Cet entrelacs est naturellement muni d'une structure de multi-entrelacs, les multiplicités (toutes positives) étant données par les multiplicités de la décomposition en facteurs irréductibles du polynôme $f - c$.

Nous rappelons finalement le théorème de fibration dans le cas local [Mi88].

Théorème 1.5 (Fibration de Milnor dans le cas local). Soit $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ une application polynomiale avec $f(0,0) = 0$, alors pour $0 < \varepsilon < r_1$, $K_{0,\varepsilon}$ est un multi-entrelacs fibré.

Par la suite nous noterons $K_c = f^{-1}(c) \cap S_r^3$ pour r grand, c'est-à-dire $r > r_s$. K_c est l'entrelacs à l'infini (où le multi-entrelacs à l'infini si l'on considère l'entrelacs avec les multiplicités).

Fibration de Milnor à l'infini

Soit f un polynôme de deux variables complexes. Soit R_0 un réel suffisamment grand tel que le type topologique de l'entrelacs $f^{-1}(0) \cap S_R^3$ soit indépendant de $R \geq R_0$. Nous fixons $R \geq R_0$. Nous cherchons une condition suffisante pour que l'application de Milnor

$$\frac{f}{|f|} : S_R^3 \setminus f^{-1}(0) \longrightarrow S^1$$

soit une fibration, plusieurs points de vue sont possibles. Tout d'abord si l'on reste « loin » de la fibre alors

$$\frac{f}{|f|} : S_R^3 \setminus f^{-1}(\mathcal{D}) \longrightarrow S^1$$

est une fibration avec \mathcal{D} un grand disque de \mathbb{C} contenant 0. Pour pouvoir se rapprocher de la fibre il est possible de recopier la preuve du théorème de fibration local de Milnor et d'ajouter les hypothèses numériques manquantes. Ici nous donnons, à partir d'hypothèses topologiques, une démonstration géométrique basée sur la résolution à l'infini des singularités. De plus nous obtenons une fibration en multi-entrelacs.

1 Fibrations de Milnor

1.1 Fibration d'après Neumann

Dans [Ne₈₉⁹] W. Neumann prouve un théorème de fibration « loin » de toutes les singularités :

Théorème 2.1. Soit $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ il existe un grand disque \mathcal{D} de \mathbb{C} qui vérifie :

1. $\mathcal{T} = f^{-1}(\mathcal{D}) \cap S_R^3$ est une union de tores solides.
2. $\frac{f}{|f|} : S_R^3 \setminus f^{-1}(\mathcal{D}) \rightarrow S^1$ est une fibration localement triviale.
3. Cette fibration est difféomorphe à la fibration $f : f^{-1}(\partial\mathcal{D}) \cap B_R^4 \rightarrow \partial\mathcal{D}$.

De plus les âmes de tores solides \mathcal{T} définissent un multi-entrelacs \mathcal{L} et les multiplicités sont données par les classes d'homologie du bord d'une fibre $f^{-1}(z) \cap \partial\mathcal{T}$ dans \mathcal{T} .

1.2 Fibration d'après Néméthi et Zaharia

Soit $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme à n variables complexes. Définissons l'ensemble :

$$M(f) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \text{il existe } \lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } \text{grad } f(z) = \lambda z\}.$$

Ici le gradient est le gradient complexe de J. Milnor [Mi68],

$$\text{grad } f = \left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial z_{(1)}}, \dots, \frac{\overline{\partial f}}{\partial z_{(n)}} \right).$$

Enfin d'après A. Némethi et A. Zaharia [NZ92] le polynôme f est *semi-modéré* si quelque soit la suite $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $M(f)$ vérifiant la condition (\star) suivante :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|z_k\| = \infty \quad ; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \text{grad } f(z_k) = 0$$

et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) \text{ est finie,}$$

alors $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = 0$.

Il est à noter que cette définition privilégie la valeur 0 (voir le premier paragraphe du chapitre 4).

Voici le principal résultat de [NZ92] :

Théorème 2.2. Si f est semi-modéré alors l'application

$$\frac{f}{|f|} : S_R^{2n-1} \setminus f^{-1}(0) \rightarrow S^1$$

est une fibration localement triviale (R est suffisamment grand).

La démonstration est calquée sur le cas local de Milnor [Mi68], la condition «semi-modéré» étant nécessaire pour obtenir l'équivalent du lemme des petits chemins (*curves selection lemma*) à l'infini.

2 Fibration du multi-entrelacs $f^{-1}(0) \cap S_R^3$

Théorème 2.3. Soit $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ une application polynomiale pour laquelle toute valeur $c \neq 0$ est régulière à l'infini. Alors dans la classe d'isotopie de

$$\frac{f}{|f|} : S_R^3 \setminus f^{-1}(0) \rightarrow S^1$$

il existe une fibration en multi-entrelacs.

Dans toute cette section nous supposons que f n'admet aucune valeur irrégulière à l'infini ou bien que 0 est la seule valeur irrégulière à l'infini de f . De plus nous noterons $\phi = \phi_t$ la résolution totale de f à l'infini.

2.1 Changement de sphère

Nous cherchons à « voir » la sphère S_R^3 après éclatement. Comme en dehors du diviseur exceptionnel, le morphisme π_t provenant de la résolution de f est un isomorphisme, alors les sphères S_R^3 et $\pi_t^{-1}(S_R^3)$ sont isomorphes. Cependant cette sphère $\pi_t^{-1}(S_R^3)$ n'est pas facilement identifiable par des équations, aussi nous la remplaçons par une autre. Soit S le bord d'un voisinage tubulaire de $\pi_t^{-1}(L_\infty)$, alors d'après A. Durfee [Dur83] les sphères $\pi_t^{-1}(S_R^3)$ et S sont difféomorphes.

Au lieu de regarder la restriction $f/|f|$ à $S_R^3 \setminus f^{-1}(0)$, nous étudions plutôt la restriction de $\phi/|\phi|$ à $S \setminus \phi^{-1}(0)$ (avec $\phi = f \circ \pi_t$). Nous perdons un peu d'information du fait du changement de sphère : en montrant que $\phi/|\phi|$ est une fibration, nous montrons qu'il existe une fibration dans la classe d'isotopie de $f/|f|$. Notons θ la restriction $\phi/|\phi|$ à $S \setminus \phi^{-1}(0)$. Nous décomposons $S \setminus \phi^{-1}(0)$ en morceaux sur lesquels il est facile de montrer que θ est une fibration.

Dans [LMW89] il est donné une correspondance entre les composantes irréductibles du diviseur $\pi_t^{-1}(L_\infty)$ et les variétés de Seifert d'une décomposition de Waldhausen¹ de $S \setminus \phi^{-1}(0)$. Pour D une composante irréductible de $\pi_t^{-1}(L_\infty)$, nous notons $\sigma(D)$ la variété de Seifert associée à D . Comme nous avons utilisé la résolution totale π_t nous avons des équations locales de ϕ au voisinage de D . Si $D \subset D_\infty$ ou si $D \subset D_0$ alors les équations locales de ϕ sont similaires à celles du cas local. Aussi nous regardons ce qui est nouveau, c'est-à-dire ce qui se passe au voisinage du dicritique.

¹Une variété M est dite de *Waldhausen* s'il existe une famille de tores surfaces \mathcal{T} telle que $M \setminus \mathcal{T}$ soit une union disjointe de variétés de Seifert. La décomposition est *minimale* si la famille \mathcal{T} l'est. Cette décomposition est aussi celle de Jaco-Shalen-Johannson.

2.2 Quelques lemmes

Comme nous avons supposé que 0 est la seule valeur irrégulière à l'infini possible, alors deux cas sont à distinguer pour une composante irréductible D de D_{dic} selon que $D \cap D_0$ est vide ou non. Dans les deux cas nous obtenons des informations sur D .

Lemme 2.4. Toute composante dicritique D avec $D \cap D_0 = \emptyset$ est de degré 1.

Preuve. La restriction $\phi|_D : D \longrightarrow \mathbb{C}P^1$ est un revêtement ramifié en ∞ , donc en restreignant aux points $D^\circ = D \setminus \{\infty\}$ l'application $\phi|_{D^\circ} : D^\circ \longrightarrow \mathbb{C}P^1 \setminus \{\infty\}$ est un revêtement topologique au-dessus d'un disque. Par suite D° est une union de disques mais D° est connexe donc le revêtement est d'ordre 1 et le dicritique est donc par définition de degré 1. \square

Lemme 2.5. L'ensemble des points lisses dans $\pi_t^{-1}(L_\infty)$ de chaque composante irréductible du diviseur dicritique qui rencontre $D_{crit} = D_0$ est (abstraitement) un anneau.

En d'autres termes, sachant qu'une composante irréductible D du diviseur dicritique D_{dic} rencontre D_∞ en un unique point (car le graphe dual de $D_\infty \cup D_{dic}$ est un arbre, voir [LW₃₈]), alors l'intersection de D et de $D_{crit} = D_0$ est réduite à un seul point.

Preuve. Soit D une composante de D_{dic} tel que $D \cap D_0 \neq \emptyset$. La restriction

$$\phi|_D : D \longrightarrow \mathbb{C}P^1$$

a deux valeurs critiques 0 et ∞ . De plus $\phi|_D$ est un revêtement ramifié d'ordre d , le degré de D . Lorsque l'on restreint ce revêtement aux points lisses D° de D , on obtient cette fois un revêtement topologique :

$$\phi|_{D^\circ} : D^\circ \longrightarrow \mathbb{C}P^1 \setminus \{0, \infty\}.$$

Or $\mathbb{C}P^1 \setminus \{0, \infty\}$ est (topologiquement) un anneau, donc de caractéristique d'Euler nulle. D° est donc également de caractéristique nulle, et comme D° est connexe, c'est un anneau. Il y a donc un unique point dans $D \cap D_0$. \square

2.3 Fibration autour des points lisses du dicritique

Soit D une composante irréductible du diviseur dicritique. Dans les deux cas correspondant aux lemmes 2.4 et 2.5, les points lisses D° de D dans $\pi_t^{-1}(L_\infty) \cup \phi^{-1}(0)$ forment un anneau et

$$\phi|_{D^\circ} : D^\circ \longrightarrow \mathbb{C}P^1 \setminus \{0, \infty\}$$

est un revêtement topologique d'ordre d ($d = 1$ dans le lemme 2.4). Si l'anneau $\mathbb{C}P^1 \setminus \{0, \infty\}$ est paramétrisé par $u \in \mathbb{C}^*$ alors on choisit des coordonnées (u, v) au voisinage de D° pour que ϕ soit de la forme $\phi(u, v) = u$ sur des ensembles sur lesquels ϕ est un revêtement d'ordre 1. Nous choisissons S de façon à ce que S ait localement pour équation : $(|v| = \varepsilon)$, où ε est un petit nombre réel.

Au-dessus de l'anneau $(k < |u| < K) \subset \mathbb{C}P^1 \setminus \{0, \infty\}$, on calcule la portion de fibre de $\theta^{-1}(e^{i\alpha})$. L'ensemble

$$\left\{ (u, v) \mid |v| = \varepsilon, k < |u| < K \text{ et } \frac{u}{|u|} = e^{i\alpha} \right\}$$

est un anneau $]ke^{i\alpha}, Ke^{i\alpha}[\times S_\varepsilon^1$ et comme ϕ est d'ordre d , la portion de fibre $\theta^{-1}(e^{i\alpha})$ située au-dessus des points lisses de D est d anneaux disjoints du type $]ke^{i\alpha}, Ke^{i\alpha}[\times S_\varepsilon^1$.

De plus pour $U \subset S^1$ un petit arc contenant $e^{i\alpha}$ le diagramme suivant est commutatif et la restriction de θ à la variété de Seifert $\sigma(D)$ associée à D est une fibration dont les fibres sont composées de d anneaux.

$$\begin{array}{ccc} \theta^{-1}(U) & \xrightarrow{\cong} & \psi^{-1}(e^{i\alpha}) \times U \\ & \searrow \theta & \downarrow pr_U \\ & & U. \end{array}$$

2.4 Fibration autour des points de ramification du dicritique

Dans le voisinage V d'un point non lisse (*i.e.* appartenant à une composante D de D_{dic} et à une autre composante D' de $\pi_t^{-1}(L_\infty)$) ϕ est définie dans des coordonnées locales appropriées par $(u, v) \mapsto u^d$ avec D ayant pour équation locale $(v = 0)$ et D' ($u = 0$).

Soit T un fibré en disque de base $D \cap V$ isomorphe à un voisinage tubulaire de $D \cap V$ donné par $(|v| \leq \varepsilon)$. $\theta|_V = \frac{\phi}{|\phi|}|_{V \setminus (u=0)}$ définit une fibration ayant pour fibre d anneaux :

$$\theta^{-1}(e^{i\alpha}) \cap T = \left\{ (u, v) \in T \mid |v| = \varepsilon, u \neq 0 \text{ et } \frac{u^d}{|u|^d} = e^{i\alpha} \right\}.$$

De même, après avoir choisi un fibré T' au-dessus de $D' \cap V$ considéré comme un voisinage tubulaire $(|u| \leq \varepsilon)$, la fibre est composée de d disques :

$$\theta^{-1}(e^{i\alpha}) \cap T' = \left\{ (u, v) \in T' \mid |u| = \varepsilon, \frac{u^d}{|u|^d} = e^{i\alpha} \right\}.$$

Il reste à vérifier que cela se recolle correctement sur le tore $\partial T \cap \partial T' = (|u| = \varepsilon, |v| = \varepsilon)$. Or la fibre provenant de ∂T coupée en $(|u| = \varepsilon)$ est

$$\left\{ (u, v) \in V \mid |u| = \varepsilon, |v| = \varepsilon \text{ et } \frac{u^d}{|u|^d} = e^{i\alpha} \right\}.$$

ce qui correspond à la portion de fibre tracée sur $\partial T'$ intersectée avec $(|v| = \varepsilon)$. Le plombage de $(T, (|u| \leq \varepsilon))$ avec $(T', (|v| \leq \varepsilon))$ montre que θ est encore une fibration sur V .

2.5 Fibration au voisinage de la transformée stricte

Une branche de la transformée stricte peut s'accrocher soit à une composante D' de $D_{crit} = D_0$ soit à une composante D du dicritique.

Dans le premier cas, dans une boule V voisinage de l'intersection de D' avec la transformée stricte, ϕ est donnée localement par $\phi(u, v) = u^p v^q$; avec D' d'équation $(v = 0)$, S considérée comme d'équation $(|v| = \varepsilon)$, la composante de l'entrelacs est donnée par $\phi^{-1}(0) \cap S \cap V$. La multiplicité de cette composante est p . Alors $\theta|_V$ est une fibration de fibre composée de $\text{pgcd}(p, q)$ anneaux :

$$\theta^{-1}(e^{i\alpha}) \cap V = \left\{ (u, v) \in V \mid |v| = \varepsilon, u \neq 0 \text{ et } \frac{u^p v^q}{|u^p v^q|} = e^{i\alpha} \right\}.$$

C'est une fibration en multi-entrelacs car sur un tore $D_\delta^2 \times S_\varepsilon^1 \setminus \{0\}$, la trace de la fibre à $v = cst$ est constituée de p rayons du disque $D_\delta^2 \setminus \{0\} \times \{v\}$. Dans le deuxième cas la transformée stricte coupe transversalement la composante D du dicritique. Dans un voisinage V de ce point d'intersection, l'équation de ϕ est $\phi(u, v) = u^p$ (D est d'équation locale $(v = 0)$). De nouveau $\theta|_V$ est une fibration, elle est de plus en multi-entrelacs autour du nœud $\{0\} \times S_\varepsilon^1$.

2.6 Recollement

Nous avons pris soin de vérifier que θ est une fibration au voisinage des points de $S \cap \phi^{-1}(0)$; de plus θ est une fibration sur tous les $V \cap S$ qui forment un recouvrement de $S \setminus \phi^{-1}(0)$. En conclusion

$$\frac{\phi}{|\phi|} : S \setminus \phi^{-1}(0) \longrightarrow S^1$$

est une fibration localement triviale, et même une fibration en multi-entrelacs. Si f est un polynôme réduit alors cette fibration est une fibration en livre ouvert.

3 Topologie de la fibre de Milnor

L'avantage de la méthode décrite ci-dessus est qu'elle permet de calculer facilement la topologie (non plongée) de la fibre de Milnor. Nous exprimons ces résultats sous la forme d'un exemple, la théorie étant à peu près la même que celle du cas local : seul ce qui se passe au-dessus des composantes dicritiques est différent.

3.1 L'exemple

Cet exemple d'un polynôme avec 0 pour unique valeur irrégulière à l'infini est dû à Artal [Ar93].

$$f(x, y) = (x(xy - 1) - y^2)^2 - 4y(xy - 1)((xy - 1) - y^3) - ((xy - 1) - y^3)^2.$$

Ce polynôme a 5 points situés sur la droite à l'infini, seul le point $P_1 = (1 : 0 : 0)$ est singulier.

L'arbre dual de résolution à l'infini est dessiné sur la figure suivante (il y a 4 branches identiques et une particulière).

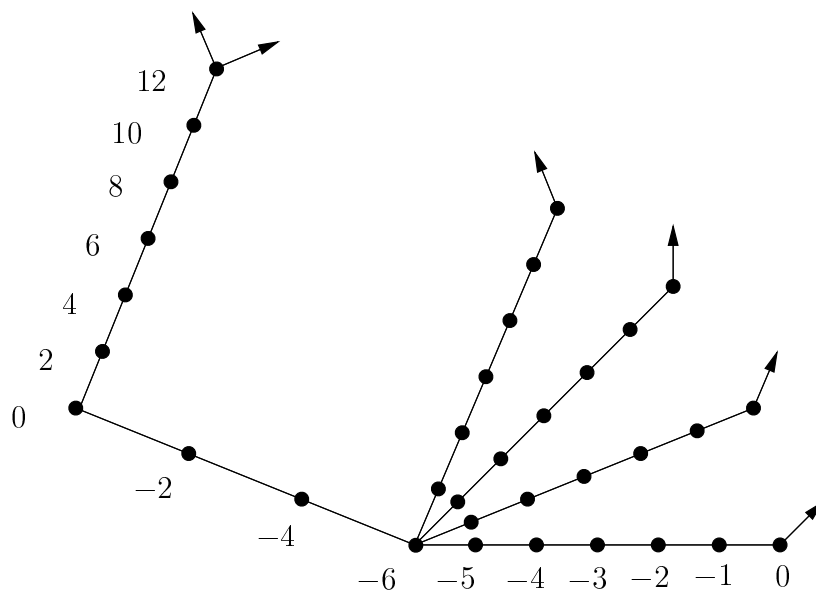


Fig. 4 - Arbre de f à l'infini

Chaque sommet représente une composante à laquelle est associée sa multiplicité ; les flèches correspondent aux composantes de la transformée stricte de $f^{-1}(0)$. Les

sommets de multiplicité strictement négative (*resp.* strictement positive) représentent les composantes de D_∞ (*resp.* D_0). Les composantes du dicritique sont de multiplicité 0 et ici de degré la valeur absolue des multiplicités des sommets voisins.

3.2 Topologie de la fibre de Milnor

La portion de la fibre de Milnor F_i au-dessus des points lisses D_i° de D_i s'obtient facilement par les remarques qui suivent. Notons $V(i)$ les sommets j voisins de i (*i.e.* $D_i \cap D_j \neq \emptyset$), alors :

- le nombre de composantes connexes de F_i est $\text{pgcd}(m_i, m_{j_1}, \dots, m_{j_k})$ si $V(i) = \{j_1, \dots, j_k\}$;
- le nombre de composantes de bord communes à F_i et F_j est $\text{pgcd}(m_i, m_j)$ (pour i et j voisins);
- la caractéristique d'Euler de F_i est donnée par la relation $\chi(F_i) = |m_i| \times \chi(D_i^\circ)$ et D_i° est un $\mathbb{C}P^1$ troué, de caractéristique d'Euler $\chi(D_i^\circ) = 2 - \text{Card } V(i)$.

Remarquons que la portion de fibre au-dessus d'une composante de valence 2 est une union d'anneaux.

Détaillons le calcul pour la portion de fibre de Milnor F_∞ au-dessus de D_∞ . Il suffit de regarder le morceau de fibre au-dessus du sommet de multiplicité -6 .

- le nombre de composantes connexes de F_∞ est $1 = \text{pgcd}(-6, -4, -5)$;
- le nombre de composantes de bord communes avec le sommet de multiplicité -4 est $2 = \text{pgcd}(-6, -4)$, avec celui de multiplicité -5 est $1 = \text{pgcd}(-6, -5)$. Au total cela représente $6 = 2 + 4 \times 1$ composantes de bord;
- la caractéristique d'Euler de F_∞ est $\chi(F_\infty) = |-6| \times (2 - 5) = -18$.

Donc F_∞ est une surface de caractéristique d'Euler -18 avec 6 composantes de bord donc elle est de genre 7. En fait la fibre régulière $f^{-1}(c)$ ($c \notin B$) est la fibre F_∞ .

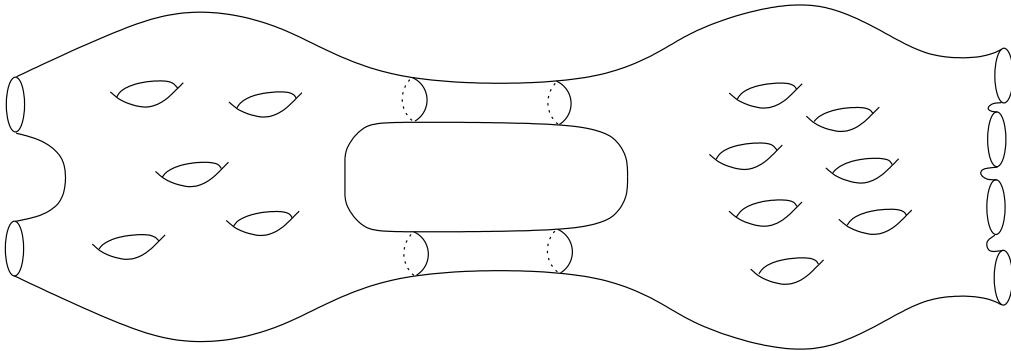


Fig. 5 – Fibre de Milnor à l'infini

Le calcul précédent et des calculs similaires donnent la topologie de la fibre de Milnor :

- au-dessus de D_∞ : F_∞ est une surface de genre 7 avec 6 composantes de bord ;
- au-dessus de la composante de D_{dic} de degré 2 : F_{dic} est la réunion de 2 anneaux ;
- au-dessus de D_0 : F_0 est une surface de genre 5 avec 4 composantes de bord.

Au final, la fibre de Milnor est une surface de genre 13 avec 6 composantes de bord.

Entrelacs non fibrés

Dans cette partie nous cherchons une réciproque au théorème 2.3 de fibration du chapitre précédent. Nous nous basons toujours sur la résolution des entrelacs à l'infini.

1 Un résultat de Neumann et Rudolph

Le premier résultat concerne les entrelacs des valeurs régulières [NR¹⁹].

Proposition 3.1. Soit 0 une valeur régulière à l'infini de la fonction polynomiale $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$. Si $c \neq 0$ est une valeur irrégulière à l'infini de f alors l'entrelacs $K_0 = f^{-1}(0) \cap S_R^3$ ($R \gg 1$) n'est pas un entrelacs fibré.

Il ne s'agit donc ici que des cas où f est un polynôme réduit, car si f n'est pas réduit alors 0 est une valeur irrégulière à l'infini (voir plus loin le lemme 4.6). Pour l'exemple de Broughton $f(x, y) = x(xy + 1)$ où 0 est l'unique valeur irrégulière à l'infini de f , nous savons d'après le théorème 2.3 que l'entrelacs $K_0 = f^{-1}(0) \cap S_R^3$ fibre et par le résultat ci-dessus que les entrelacs $K_c = f^{-1}(c) \cap S_R^3$ pour $c \neq 0$ ne fibrent pas. Cependant ce résultat est limité aux fonctions ayant une unique valeur irrégulière à l'infini. Que dire du polynôme de Briançon

$$f(x, y) = yp^3 + p^2s + a_1ps + a_0s$$

avec

$$s = xy + 1, \quad p = x(xy + 1) + 1, \quad a_1 = -\frac{5}{3}, \quad a_0 = -\frac{1}{3},$$

qui a les valeurs irrégulières à l'infini 0 et $c = \frac{16}{9}$? Nous constatons à la main que les entrelacs K_0 et K_c ne fibrent pas. Nous nous proposons donc de généraliser le résultat précédent à toutes les situations.

2 L'application de Milnor n'est pas une fibration

Il est intéressant de regarder quand et pourquoi l'application de Milnor $\frac{f}{|f|}$ ou plutôt $\frac{\phi}{|\phi|} : S \setminus \phi^{-1}(0) \longrightarrow S^1$, n'est pas une fibration. En effet comme nous l'avons vu au chapitre précédent, cette application est le candidat le plus sérieux comme fibration de $S \setminus \phi^{-1}(0)$ dans le cas où l'entrelacs K_0 est fibré.

Les notations sont celles du chapitre précédent.

2.1 Énoncé

Soit $\phi = \phi_t$ provenant de la résolution totale du polynôme $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$.

Proposition 3.2. Soit $c \neq 0$ une valeur irrégulière à l'infini de f alors

$$\frac{\phi}{|\phi|} : S \setminus \phi^{-1}(0) \longrightarrow S^1$$

n'est pas une fibration localement triviale.

Le reste de cette section est consacré à la preuve.

2.2 Preuve

Sans perte de généralité nous supposons que $c = 1$ est une valeur irrégulière à l'infini de f . Comme annoncé plus haut nous effectuerons la résolution totale de f et nous notons $\phi = \phi_t$.

Au voisinage de la transformée stricte de $\phi^{-1}(1)$.

Lemme 3.3. Si $f - 1$ n'est pas un polynôme réduit alors

$$\frac{\phi}{|\phi|} : S \setminus \phi^{-1}(0) \longrightarrow S^1$$

n'est pas une fibration localement triviale.

Preuve. Pour une branche de la transformée stricte de $f - 1$, nous avons localement au voisinage de l'intersection de cette branche avec un diviseur D de $\pi_t^{-1}(L_\infty)$, l'équation locale

$$\phi(u, v) = u^p v^q + 1$$

où $(v = 0)$ est une équation locale de D de multiplicité q et $(u = 0)$ une équation locale de la branche considérée de multiplicité p .

Calculons la trace de la fibre $\theta^{-1}(+1)$ ($\theta = \frac{\phi}{|\phi|}$) sur un petit tore plein $\mathcal{T} = D_\delta^2 \times S_\varepsilon^1$ voisinage de l'intersection de notre branche et de la sphère S :

$$\begin{aligned} \theta^{-1}(+1) \cap \mathcal{T} &= \left(\frac{\phi}{|\phi|} \right)^{-1} (+1) \cap \mathcal{T} \\ &= \left\{ (u, v) \in D_\delta^2 \times S_\varepsilon^1 \mid \frac{\phi(u, v)}{|\phi(u, v)|} = +1 \right\} \\ &= \left\{ (u, v) \in D_\delta^2 \times S_\varepsilon^1 \mid u^p v^q = -1 + \lambda \text{ avec } \lambda > 0 \right\}. \end{aligned}$$

Pour v fixé dans S_ε^1 , u appartient à p segments contenant $(0, v)$ et symétriques par rapport à ce point. Pour u fixé, v a $2q$ solutions (q solutions avec $\lambda - 1 > 0$ et q solutions avec $\lambda - 1 < 0$). Sur les tores $S_\gamma^1 \times S_\varepsilon^1$ (avec $\gamma \leq \delta$) la trace de la fibre est constituée de $2\nu = 2\text{pgcd}(p, q)$ nœuds de type $(\frac{p}{\nu}, \frac{q}{\nu})$. On remarque que si $p > 1$ alors la fibre n'est pas une surface, ce qui achève la démonstration. \square

Nous obtenons également dans la preuve que si $p = 1$ alors la portion de fibre est abstraitement un anneau.

Double revêtement. Quelle est la topologie de la portion de fibre $\theta^{-1}(+1)$ située au-dessus de $D_1 \setminus \phi^{-1}(1)$?

Notons D une composante de D_1 et D° l'ensemble des points lisses de D dans le diviseur à l'infini. Pour connaître la topologie de la fibre $\theta^{-1}(+1)$, regardons la topologie de la portion F située au-dessus de D et F° la portion de fibre située au-dessus de D° .

L'application $\rho : F^\circ \rightarrow D^\circ$ (où ρ est induit par la rétraction de Du Bois et Michel [DM $_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$]) est un revêtement d'ordre $2q$ si q est la multiplicité de D . En effet ϕ est localement de la forme $\phi(u, v) = v^q + 1$ (u paramétrise D° et S a pour équation $|v| = \varepsilon$) donc

$$\begin{aligned} \theta(u, v) = +1 &\Rightarrow v^q = -1 + \lambda \text{ avec } \lambda > 0 \\ &\Rightarrow v^q = \varepsilon^q \text{ ou } v^q = -\varepsilon^q \\ &\Rightarrow v \in \left\{ \varepsilon^{\frac{1}{q}} e^{\frac{2ik\pi}{q}} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{ou} \quad v \in \left\{ \varepsilon^{\frac{1}{q}} e^{\frac{(2ik+1)\pi}{q}} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

Cela définit bien un revêtement d'ordre $2q$ qui n'est pas cyclique. Si le morphisme $\zeta : H_1(D^\circ) \rightarrow \mathbb{Z}/2q\mathbb{Z}$ est induit par le revêtement ρ , le nombre de composantes connexes de F° est l'indice de l'image de ζ .

Sur les tores de plombage des composantes D et D' de D_1 (de multiplicité q et q'), la trace de la fibre est constituée de 2ν nœuds de type $(\frac{q}{\nu}, \frac{q'}{\nu})$ où ν est pgcd de q et q' : c'est toujours le cas local dédoublé.

La situation est donc la suivante : le revêtement est le revêtement du cas local dédoublé. De plus la fibre F° se reconnecte si une transformée stricte coupe D ; dans ce cas les deux composantes de bord de F° associées à la transformée stricte se recollent par l'anneau obtenu précédemment.

Comparaison des fibres $\theta^{-1}(+1)$ et $\theta^{-1}(-1)$. Les topologies de $\theta^{-1}(+1)$ et celle de $\theta^{-1}(-1)$ sont les mêmes au-dessus du diviseur D_∞ et du diviseur D_0 (éventuellement vide si 0 est une valeur régulière). Nous allons voir qu'elles diffèrent à partir d'une composante D du dicritique D_{dic} où s'accroche une composante de D_1 . Paramétrisons par $z \in \mathbb{C}P^1$ l'image de D par ϕ . La portion de $\theta^{-1}(-1)$ située au-dessus de D est constituée de d anneaux (d est le degré de D). La fibre $\theta^{-1}(-1)$ ne « passe » pas au dessus de D_1 . La fibre $\theta^{-1}(-1)$ est constituée de deux portions d'anneaux, l'une qui « arrive de D_∞ et va vers D_0 » et l'autre qui « arrive de D_0 et va vers l'entrelacs $\phi^{-1}(0) \cap S$ ». Voir la figure 6.

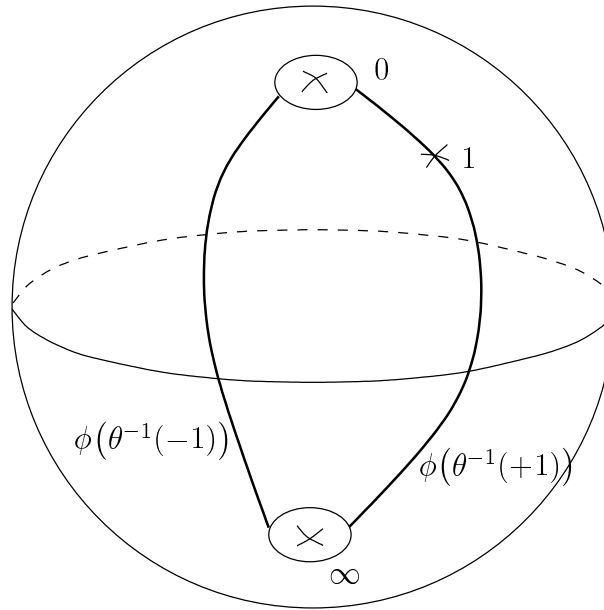


Fig. 6 – Image par ϕ sur le dicritique des fibres $\theta^{-1}(+1)$ et $\theta^{-1}(-1)$

Pour que $\theta = \frac{\phi}{|\phi|}$ soit une fibration, il est nécessaire que les topologies de $\theta^{-1}(+1)$ et $\theta^{-1}(-1)$ soient les mêmes. Mais $\theta^{-1}(+1)$ s'obtient à partir de $\theta^{-1}(-1)$ en ajoutant la portion de fibre de $\theta^{-1}(+1)$ située au-dessus de D_1 . Pour que ces topologies soient identiques, il faut que la portion de fibre que l'on rajoute soit une union d'anneaux. Comme $f - 1$ est réduite et comme le revêtement induit par la portion de fibre est le double du revêtement habituel, nous verrons plus loin (voir le chapitre suivant,

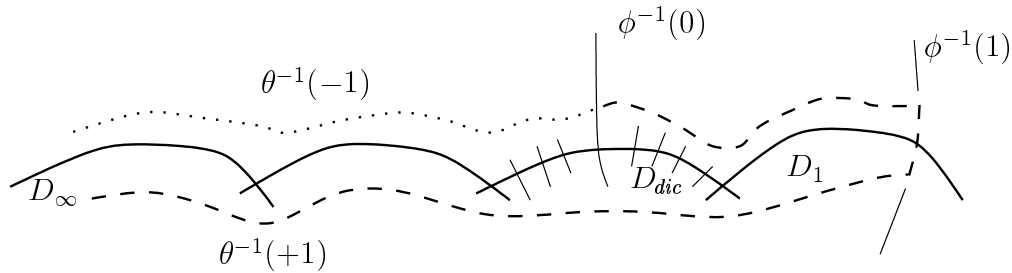


Fig. 7 - Les fibres $\theta^{-1}(+1)$ et $\theta^{-1}(-1)$

démonstration du théorème 4.2) que ceci n'est pas possible (la portion de fibre ajoutée a une caractéristique d'Euler strictement négative).

En conclusion les fibres $\theta^{-1}(+1)$ et $\theta^{-1}(-1)$ sont distinctes donc $\theta = \frac{\phi}{|\phi|}$ n'est pas une fibration.

3 Non fibration

Généralisons le résultat du paragraphe précédent et montrons en fait qu'il n'existe aucune fibration du complémentaire de l'entrelacs.

3.1 Énoncé

Théorème 3.4. Si $c \neq 0$ est une valeur irrégulière à l'infini de f alors le multi-entrelacs $K_0 = f^{-1}(0) \cap S_R^3$ n'est pas un entrelacs fibré.

Dans le reste de cette section nous allons démontrer ce résultat.

3.2 Multi-entrelacs non fibrés

Nous utilisons un théorème de D. Eisenbud et W. Neumann [EN₈₈, th. 11.2] qui donne un critère général pour savoir si un entrelacs (ou un multi-entrelacs) fibre ou ne fibre pas.

Nous reformulons ici l'énoncé de ce théorème, mais nous avons d'abord besoin d'une définition. Soit M une variété de Waldhausen, nous supposons que la décomposition est minimale. Une *composante virtuelle* de M est une fibre régulière d'une variété de Seifert de la décomposition minimale.

Théorème 3.5. Soit un multi-entrelacs K dont l'entrelacs sous-jacent¹ n'est pas l'entrelacs de Hopf. Si une surface de Seifert \mathcal{F} pour K et une composante virtuelle ℓ ont une intersection vide alors le multi-entrelacs K n'est pas fibré.

3.3 Cas général

Nous supposons que $c \neq 0$ est une valeur irrégulière à l'infini de f et que l'entrelacs sous-jacent à K_0 n'est pas l'entrelacs de Hopf. Nous effectuons la résolution partielle de f pour la valeur 0 et nous notons $\phi = \phi_p$. Nous allons démontrer en fait que le multi-entrelacs K_0 vu dans la sphère S ne fibre pas, ce qui donnera le résultat souhaité.

Surface de Seifert. Afin d'appliquer le théorème ci-dessus nous définissons une surface \mathcal{F} pour le multi-entrelacs K_0 (vu dans S) :

$$\mathcal{F} = \left(\frac{\phi}{|\phi|} \right)^{-1} \left(-\frac{c}{|c|} \right) \cap S.$$

\mathcal{F} est bien une surface de Seifert de K_0 quitte à supposer sans perte de généralité que

$$\{\lambda c \mid \lambda < 0\}$$

ne contient aucune valeur critique à l'infini de f et quitte à prendre une valeur proche de $\frac{-c}{|c|}$ afin que \mathcal{F} soit une surface lisse.

Composante virtuelle. Cherchons maintenant une « bonne » composante virtuelle de $S \setminus K_0$. Pour des nombres complexes ω suffisamment proches de c :

$$0 \leq |\omega - c| \ll |c|,$$

les entrelacs $\phi^{-1}(\omega) \cap S$ ne rencontrent pas notre surface de Seifert \mathcal{F} . Parmi les ω qui vérifient la propriété ci-dessus, nous en choisissons un qui soit une valeur régulière à l'infini de f .

Lemme 3.6. Il existe une composante virtuelle ℓ pour une décomposition minimale de la variété de Waldhausen $M = S \setminus K_0$. De plus nous pouvons choisir ℓ parmi les composantes connexes de l'entrelacs $\phi^{-1}(\omega) \cap S$.

¹*i.e.* l'entrelacs associé au multi-entrelacs après avoir oublié les multiplicités.

Preuve. Nous utilisons la décomposition de Waldhausen de $M = S \setminus K_0$ décrite dans [LMW₀₁]. Une décomposition minimale s'obtient comme union des variétés de Seifert $\sigma(D)$ associées aux composantes D de $\pi_p^{-1}(L_\infty)$ de valence au moins 3. De plus les fibres de Seifert sont les bords des disques associés au fibré normal de D . D'après le lemme 3.7 suivant il existe une composante dicritique D de valence au moins 3. Notons ℓ une composante connexe de $\phi^{-1}(\omega) \cap \sigma(D)$. Alors ℓ est bien une fibre régulière de $\sigma(D)$, $\sigma(D)$ appartenant à la décomposition minimale. \square

Lemme 3.7. Il existe une composante dicritique de $\pi_p^{-1}(L_\infty)$ de valence au moins 3 dans $\pi_p^{-1}(L_\infty) \cup \phi^{-1}(0)$.

Preuve. Comme c est une valeur irrégulière à l'infini, soit il existe un diviseur D_c de D_{crit} et alors nous notons D la composante dicritique sur laquelle s'accroche D_c , soit il existe une composante dicritique D avec $\phi|_D$ admettant c comme valeur critique. Dans le premier cas, D rencontre D_∞ , D_c ainsi qu'une composante de $\phi^{-1}(0)$ (une transformée stricte ou D_0) et D est de valence au moins 3. Plaçons nous dans le second cas, si $\phi^{-1}(0)$ rencontre D en deux points alors le lemme est démontré (car D_∞ coupe toujours D). Reste le cas où $\phi^{-1}(0) \cap D$ est réduit à un seul point, il y a donc une ramification totale de $\phi|_D$ en $\phi^{-1}(0)$ et $\phi^{-1}(\infty)$, alors c ne peut être une valeur critique de $\phi|_D$. \square

Nous sommes en mesure d'appliquer le théorème 3.5 : le multi-entrelacs K_0 n'est pas un multi-entrelacs fibré.

3.4 Cas de l'entrelacs de Hopf

Il reste à étudier le cas où le complémentaire de l'entrelacs est un tore épaissi.

Lemme 3.8. Si l'entrelacs sous-jacent associé à $K_0 = f^{-1}(0) \cap S_R^3$ est l'entrelacs de Hopf alors les valeurs $c \neq 0$ sont des valeurs régulières à l'infini de f .

Preuve. Pour commencer, supposons que f soit un polynôme réduit. Alors K_0 est l'entrelacs de Hopf, et puisque K_0 est un entrelacs torique itéré autour de l'entrelacs \mathcal{L} de Neumann [Ne₈₈, §2] alors \mathcal{L} ne peut être que le nœud trivial ou l'entrelacs de Hopf.

Cas où \mathcal{L} est le nœud trivial. À chaque composante connexe de \mathcal{L} est associée une composante dicritique, il n'y a donc qu'une seule composante dicritique. Nous appellerons *polynôme primitif* un polynôme dont la fibre générique est connexe.

Théorème 3.9 (factorisation de Stein). Soit f un polynôme quelconque. Il existe $h \in \mathbb{C}[t]$ et $g \in \mathbb{C}[x, y]$ un polynôme primitif tel que $f = h \circ g$.

Soient g et h de tels polynômes pour notre application f . Comme g est primitif et admet une seule composante dicritique alors l'entrelacs à l'infini de $g^{-1}(0)$ est un nœud. Pour que l'entrelacs à l'infini de $f^{-1}(0)$ soit l'entrelacs de Hopf il est nécessaire que l'entrelacs $g^{-1}(0) \cap S_R^3$ soit le nœud trivial. Donc par le théorème d'Abhyankar-Moh (voir le chapitre 9) il existe un automorphisme algébrique Θ de \mathbb{C}^2 avec

$$g \circ \Theta(x, y) = x$$

et donc

$$f \circ \Theta(x, y) = h(x).$$

Soient x_1, \dots, x_n les racines de h ; alors les solutions de l'équation $f \circ \Theta(x, y) = 0$ sont

$$x_1 \times \mathbb{C}, \dots, x_n \times \mathbb{C}.$$

De ce fait l'entrelacs K_0 est une union de nœuds triviaux, non entrelacés, et par conséquent K_0 ne peut être l'entrelacs de Hopf.

Cas où \mathcal{L} est l'entrelacs de Hopf. Dans cette situation, les entrelacs K_0 et \mathcal{L} sont isotopes. Effectuons la résolution faible de f et notons $\phi = \phi_f$.

D'une part, la restriction de ϕ aux composantes de D_{dic} ne peut avoir 0 comme valeur critique sans qu'il existe un bambou D_0 . Si cela était possible alors une composante de K_0 serait un nœud torique itéré de façon non triviale autour d'une composante de \mathcal{L} . Ce qui contredit l'hypothèse ci-dessus.

D'autre part toute composante de \mathcal{L} est représentée par le bord d'une curvette² de la dernière composante de chaque bambou (en commençant à compter à partir du dicritique, s'il n'y a pas de bambou la curvette est rattachée à la composante dicritique). S'il existe un bambou pour la valeur 0, chaque composante F de la transformée stricte $\phi^{-1}(0) \setminus D_0$ telle que $F \cap D_0 \neq \emptyset$ doit être irréductible et intersecter D_0 transversalement. Cette situation est exclue par le lemme des bambous (voir le lemme 4.3 du chapitre suivant).

Pour la valeur 0, il ne peut y avoir ni bambou, ni valeur critique de $\phi|_{D_{dic}}$ donc 0 est une valeur régulière à l'infini de f . De plus comme K_0 et \mathcal{L} sont isotopes, toutes les composantes dicritiques sont de degré 1 et il n'existe aucun bambou pour quelque valeur que ce soit. En particulier c est une valeur régulière à l'infini de f .

Si f n'est plus un polynôme réduit, notons g le polynôme réduit associé à f . L'entrelacs $g^{-1}(0) \cap S_R^3$ est bien l'entrelacs de Hopf, et d'après ce que nous venons de démontrer dans le cas réduit, 0 est une valeur régulière à l'infini pour g .

²Une *curvette* est un petit disque qui rencontre transversalement le diviseur.

Mais les courbes algébriques régulières qui sont des anneaux³ sont classifiées par W. Neumann [Ne₈₉, §8]. Il existe un automorphisme algébrique Θ de \mathbb{C}^2 vérifiant $\Theta(0,0) = (0,0)$ tel que

$$g \circ \Theta(x, y) = xy + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

donc

$$f \circ \Theta(x, y) = (xy + \lambda)^\ell \text{ si } \lambda \neq 0$$

et

$$f \circ \Theta(x, y) = x^p y^q \text{ si } \lambda = 0.$$

Dans les deux cas, c est une valeur régulière à l'infini de f . Ce qui termine la preuve du lemme. \square

En conclusion, que 0 soit une valeur régulière à l'infini ou non, le multi-entrelacs $K_0 = f^{-1}(0) \cap S_R^3$ ne fibre pas lorsqu'il existe une valeur $c \neq 0$ critique à l'infini.

³Une courbe algébrique est un *anneau* si en tant que surface de Riemann c'est une sphère 2-trouée.

Premières applications

1 Polynômes semi-modérés

Nous avons donné au chapitre 2 la définition de *semi-modéré* et le principal théorème (th. 2.2, p. 16) : d'après [NZ₃₂] si f est semi-modéré alors l'application

$$\frac{f}{|f|} : S_R^3 \setminus f^{-1}(0) \longrightarrow S^1$$

est une fibration localement triviale (R est suffisamment grand).

Nous relierons dans ce paragraphe la définition «semi-modéré» avec la notion de valeur irrégulière à l'infini.

Proposition 4.1. Soit $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ un polynôme à 2 variables complexes. f est semi-modéré si et seulement s'il n'a pas de valeur irrégulière à l'infini en dehors de la valeur 0.

Remarque. Cette proposition et les chapitres précédents prouvent que pour la fibration du multi-entrelacs K_0 un représentant est $\frac{f}{|f|} : S_R^3 \setminus K_0 \longrightarrow S^1$.

Preuve. Un sens est simple, si f n'a pas de valeur irrégulière à l'infini, alors par la troisième caractérisation d'une valeur irrégulière à l'infini (voir th. 1.3, p. 11) aucune suite ne remplit la condition (\star) de la définition de semi-modéré. Si 0 est la seule valeur irrégulière à l'infini alors toute suite qui vérifie (\star) vérifie aussi $f(z_k) \rightarrow 0$, donc *a fortiori* c'est vrai pour les suites de $M(f)$ vérifiant (\star) .

Réciproquement : supposons que f soit semi-modéré et que $c \neq 0$ soit une valeur irrégulière à l'infini; alors par le théorème 2.2 de fibration de A. Néméthy et de A. Zaharia l'application $\frac{f}{|f|}$ est une fibration sur $S_R^3 \setminus f^{-1}(0)$, ce qui contredit le théorème 3.4 de non fibration. \square

Remarque. Cette équivalence n'était, *a priori*, pas évidente du fait de l'ensemble $M(f)$ dans la définition de semi-modéré.

2 Fibre de Milnor vs fibre générique

Dans le cas d'une singularité locale la fibre de Milnor et la fibre générique sont difféomorphes. La question de A. Némethi et A. Zaharia [NZ₀₂¹⁹] est : « dans quels cas cela est vrai à l'infini ? ».

Théorème 4.2. Soit $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ un polynôme à 2 variables complexes. Supposons que f soit réduit et que l'application

$$\frac{f}{|f|} : S_R^3 \setminus f^{-1}(0) \longrightarrow S^1$$

soit une fibration en livre ouvert. Les fibres $f^{-1}(c)$ (pour $c \neq 0$) et $f/|f|^{-1}(e^{i\alpha})$ sont difféomorphes si et seulement si 0 est une valeur régulière à l'infini.

Autrement dit les fibres sont difféomorphes si et seulement si f est bon : toutes les valeurs dans \mathbb{C} sont régulières à l'infini.

Contre-exemple. Dans le cas où f n'est pas réduit, le résultat précédent n'est plus exact. Par exemple pour $f(x, y) = x^2$, 0 est la seule valeur irrégulière, mais $f^{-1}(1)$ et $f/|f|^{-1}(1)$ sont topologiquement identiques à deux disques disjoints. C'est le lemme des bambous (voir la démonstration) qui peut être mis en défaut dans le cas non réduit.

Remarques préliminaires :

1. Soit B l'union des valeurs critiques affines et à l'infini de f . Nous savons que $f : \mathbb{C}^2 \setminus f^{-1}(B) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus B$ est une fibration localement triviale. Soit r un réel suffisamment grand afin que le disque $\mathcal{D}_r = D_r^2(0)$ centré à l'origine de \mathbb{C} et de rayon r contienne B ; notons $S_r^1 = \partial\mathcal{D}_r$. Pour $c \notin B$ et pour $z \in S_r^1$ on a $f^{-1}(c) \cong f^{-1}(z)$.
2. Nous savons également (théorème 2.1) que les fibrations

$$\frac{f}{|f|} : S_R^3 \setminus f^{-1}(\mathcal{D}_r) \longrightarrow S^1$$

et

$$f : f^{-1}(S_r^1) \longrightarrow S_r^1$$

sont isomorphes. Par conséquent la fibre

$$\frac{f}{|f|}^{-1}(e^{i\alpha}) \cap (S_R^3 \setminus f^{-1}(\mathcal{D}_r))$$

est difféomorphe à la fibre $f^{-1}(z)$ qui est une fibre générique d'après la première remarque.

Voici l'interprétation de ceci en terme de résolution partielle de f : la fibre $f^{-1}(c)$ correspond à la portion de fibre au-dessus de D_∞ pour $\frac{f}{|f|}$ (voir la figure 8).

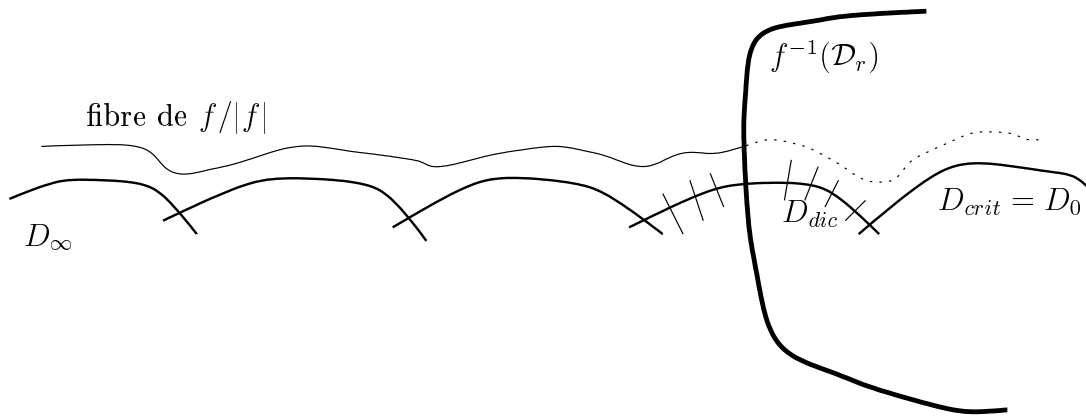


Fig. 8 – Portion de la fibre de Milnor au dessus de D_∞

3. Pour que les fibres du théorème soient difféomorphes, il faut et il suffit que la portion de fibre de $\left(\frac{f}{|f|}\right)^{-1}(e^{i\alpha})$ contenue dans $S_R^3 \cap f^{-1}(\mathcal{D}_r) \setminus f^{-1}(0)$ se rétracte dans le bord de $\left(\frac{f}{|f|}\right)^{-1}(e^{i\alpha}) \cap (S_R^3 \setminus f^{-1}(\mathcal{D}_r))$. Cela revient à exiger que cette portion de fibre de Milnor soit une union d'anneaux (un anneau par composante de bord).

Preuve. Nous effectuons la résolution faible de f et nous notons $\phi = \phi_f$.

La réciproque est simple : si 0 est une valeur régulière à l'infini alors il n'y a pas de composante D_{crit} et donc les deux fibres sont difféomorphes, car au-dessus de D_{dic} les portions de fibres de $f/|f|$ sont des anneaux.

L'implication directe est plus délicate : par l'absurde supposons que 0 soit une valeur irrégulière à l'infini et supposons que les fibres soient difféomorphes. Choisissons une

composante dicritique D qui rencontre D_0 alors le degré d de D est exactement le nombre d'anneaux qui partent de D .

Le lemme suivant (*bamboo extremity fiber*) de [MW²⁰] assure qu'il existe une composante de valence au moins 3 :

Lemme 4.3 (lemme des bambous). Si f est réduit, D_0 est un bambou, et la transformée stricte de $f^{-1}(0)$ ne rencontre D_0 qu'en un seul point alors ce point ne peut être un point de la dernière composante du bambou.

Remarque. En fait, l'étude de [MW²⁰] est un peu plus précise, sous les hypothèses du lemme alors la multiplicité m de la composante sur laquelle s'accroche la transformée stricte (qui n'est donc pas la dernière) vérifie $m = \ell m'$ avec $\ell > 1$ et m' la multiplicité de la dernière composante.

D'après le lemme des bambous il existe une composante E_k de D_0 de valence au moins 3 dans $\pi_t^{-1}(L_\infty) \cup \phi^{-1}(0)$.

Montrons que le degré de toutes les composantes dicritiques est 1.

Lemme 4.4. Le degré d'une composante dicritique est $d = 1$.

Preuve. Soit D une composante dicritique de degré d . Soit B_0 le bambou de D_0 tel que $B_0 \cap D \neq \emptyset$. La portion de fibre de Milnor au-dessus de D est composée de d anneaux. Au-dessus de composantes de valence 2 de B_0 le nombre d'anneaux ne peut que croître (le sens est défini du dicritique vers le diviseur B_0) car nous avons supposé que la fibre de Milnor est obtenue à partir de la fibre générique en collant des anneaux. À la première composante E_k de valence au moins 3 rencontrée il arrive un multiple de d anneaux. La portion de fibre au-dessus de E_k doit donc avoir un nombre de composantes connexes divisible par d . Donc il «repart» de E_k un multiple de d anneaux pour un voisin E_i car ce nombre de composantes connexes est donné par le pgcd de m_k et de m_i . Ce raisonnement s'étend maintenant à n'importe quelle composante de valence au moins 3. Par contre au-dessus de la composante où s'accroche la transformée stricte, la fibre est connexe (la multiplicité de la transformée stricte est 1 car f est réduit). Donc d divise 1 et donc $d = 1$. \square

En fait nous avons montré un peu mieux : la portion de fibre comprise entre notre composante dicritique D et notre E_k est un seul anneau. On montre de même que la portion de fibre entre la composante de la transformée stricte et E_k est un seul anneau. Cela prouve aussi qu'il n'y a qu'une transformée stricte par composante dicritique. Enfin comme le degré du dicritique est 1, l'irrégularité à l'infini ne peut provenir que d'un bambou. La situation est donc la suivante : D_0 est un bambou sur lequel s'accroche une unique transformée stricte.

La portion de fibre F_k° située au-dessus de E_k est représentée sur la figure 9.

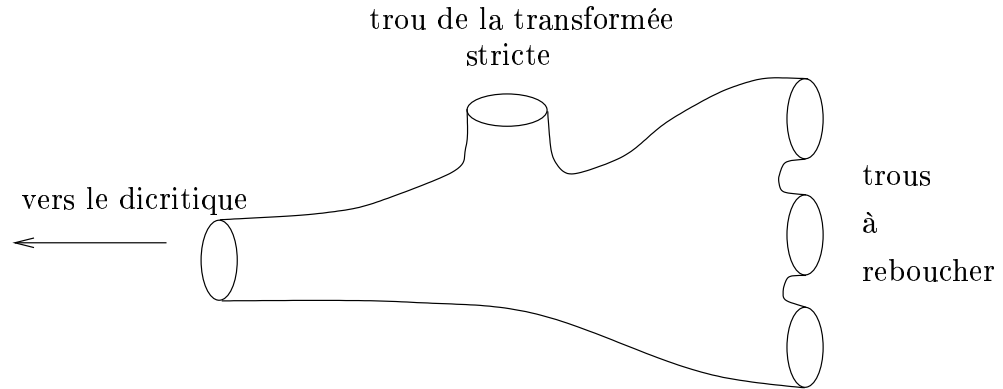


Fig. 9 – Portion de la fibre de Milnor au dessus de E_k

Il faut « reboucher les trous » qui ne proviennent ni du dicritique ni de la transformée stricte.

Calculons la caractéristique d’Euler $\chi(F_k^\circ)$ de cette portion de fibre de deux façons différentes, d’abord comme revêtement au-dessus des points lisses de E_k :

$$\chi(F_k^\circ) = -m_k,$$

car E_k a 3 voisins d’après le lemme des bambous : le voisin E_{k-1} sur le bambou, la transformée stricte et le voisin suivant sur le bambou E_{k+1} . L’autre calcul s’effectue directement, comme la caractéristique d’Euler d’une sphère trouée :

$$\chi(F_k^\circ) = -\text{pgcd}(m_k, m_{k+1}).$$

L’égalité n’est possible que si

$$\text{pgcd}(m_k, m_{k+1}) = m_k.$$

Autrement dit, il part de la composante E_k , m_k cylindres vers la composantes E_{k+1} . Mais ce nombre de cylindres vérifie $m_k \leq \text{pgcd}(m_k, m')$ (m' est la multiplicité de la dernière composante du bambou) ; or par la remarque suivant le lemme des bambous $m_k = \ell m'$ avec $\ell > 1$ donc $\ell m' \leq \text{pgcd}(\ell m', m') \leq m'$ ce qui est absurde et termine la démonstration du théorème. \square

Nous pouvons maintenant caractériser les entrelacs fibrés ayant une fibre de Milnor sans genre. Soit $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ une application polynomiale réduite et $K_0 = f^{-1}(0) \cap S_R^3$ ($R \gg 1$).

Proposition 4.5. Supposons que l'entrelacs K_0 soit un entrelacs fibré. La fibre de Milnor $f/|f|^{-1}(1)$ est rationnelle si et seulement si la fibre générique $f^{-1}(1)$ est rationnelle et tous les degrés des composantes dicritiques dans la résolution de f sont égaux à 1.

Les polynômes à fibre générique rationnelle avec des degrés des composantes dicritiques égaux à 1 sont appelés les polynômes de *type simple*. (voir plus loin, paragraphe 7.4, p. 69)

Preuve. Elle découle facilement de la méthode de la démonstration précédente. \square

3 Cas des polynômes non réduits

Quel est le lien entre une fonction polynomiale et sa réduite du point de vue des valeurs irrégulières à l'infini? Donnons d'abord quelques résultats pour le cas des puissances.

3.1 Cas d'une puissance

L'étude est simple et complète pour les fonctions puissances f^n ($n > 1$).

Lemme 4.6.

- Si f n'est pas un polynôme réduit alors 0 est une valeur irrégulière à l'infini de f .
- Si c est une valeur irrégulière à l'infini de f alors c^n est une valeur irrégulière de f^n .
- Si $c \neq 0$ est une valeur irrégulière de f^n alors il existe γ tel que $\gamma^n = c$ et γ est une valeur irrégulière à l'infini de f .

Preuve. Le premier point est trivial.

Pour la démonstration du deuxième point nous supposons $c \neq 0$. D'après les équivalences du théorème 1.3 il existe une suite (z_k) de \mathbb{C}^2 avec $\|z_k\| \rightarrow \infty$, $\text{grad } f(z_k) \rightarrow 0$ et $f(z_k) \rightarrow c$. La même suite (z_k) vérifie $f^n(z_k) \rightarrow c^n$ et comme $\text{grad } f^n = n f^{n-1} \text{grad } f$ alors $\text{grad } f^n(z_k) \rightarrow 0$ donc c^n est une valeur irrégulière à l'infini de f^n . La dernière assertion se prouve ainsi : comme précédemment prenons une suite (z_k) telle que $\|z_k\| \rightarrow \infty$, $\text{grad } f^n(z_k) \rightarrow 0$ et $f^n(z_k) \rightarrow c$. Toujours par la relation $\text{grad } f^n = n f^{n-1} \text{grad } f$ nous savons que $\text{grad } f(z_k) \rightarrow 0$, et comme $f^n(z_k) \rightarrow c$ alors il existe une sous-suite $(z_{\varphi(k)})$ et une racine n -ième γ de c telle que $f(z_{\varphi(k)}) \rightarrow 0$, et γ est une valeur irrégulière à l'infini de f . \square

3.2 Cas général

À la vue de l'étude précédente il peut sembler y avoir un lien entre les valeurs irrégulières à l'infini de f et de f_{red} , malheureusement comme nous allons le voir il n'en est rien.

Premier exemple. Soit

$$f(x, y) = x^2(xy^3 + y^2 + 1).$$

Le polynôme f_{red} n'a pas de valeur irrégulière à l'infini mais les valeurs $c = 0$ et $c = \frac{4}{27}$ sont des valeurs irrégulières à l'infini de f .

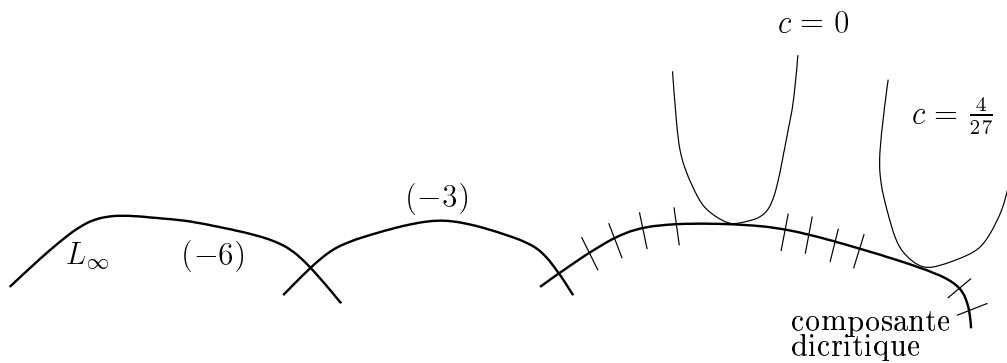


Fig. 10 – Résolution de $f(x, y) = x^2(xy^3 + y^2 + 1)$ en $P_2 = (0 : 1 : 0)$

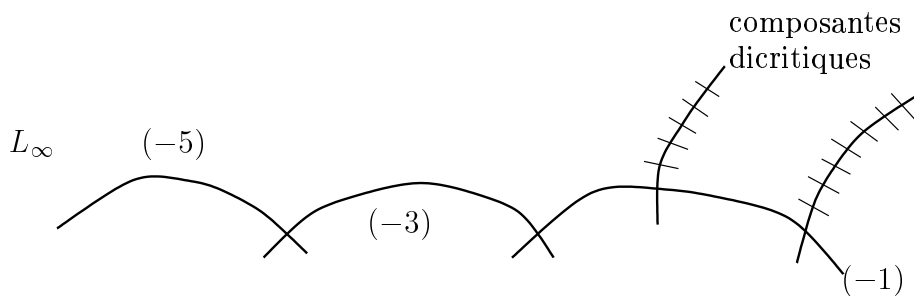


Fig. 11 – Résolution de $f_{red}(x, y) = x(xy^3 + y^2 + 1)$ en $P_2 = (0 : 1 : 0)$

Deuxième exemple. Le cas inverse peut également se produire.

Soit

$$f(x, y) = x^2(y + xy^2 + x).$$

0 est la seule valeur irrégulière à l'infini de f , par contre f_{red} a $c = -\frac{1}{4}$ comme valeur irrégulière à l'infini. De plus cette valeur provient d'une valeur critique de $\phi|_{D_{dic}}$ (ϕ provient de la résolution partielle de f_{red}).

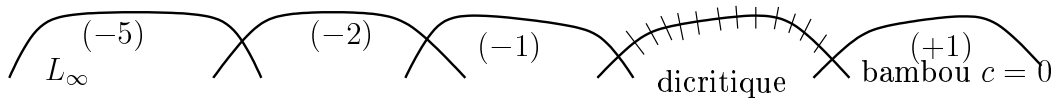


Fig. 12 - Résolution de $f(x, y) = x^2(y + xy^2 + x)$ en P_2

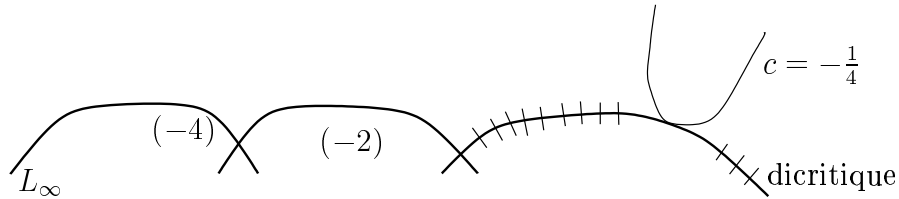


Fig. 13 - Résolution de $f_{red}(x, y) = x(y + xy^2 + x)$ en P_2

Il est possible que la valeur irrégulière à l'infini provienne d'un bambou comme dans l'exemple suivant.

Troisième exemple.

$$f(x, y) = y^2((1 + xy)^2 + x^2y)$$

0 est l'unique valeur irrégulière à l'infini de f et f_{red} a 0 comme valeur irrégulière à l'infini. C'est une valeur critique de $\phi|_{D_{dic}}$ et un bambou pour la valeur $c = 1$.

En conclusion pour une fonction f non réduite l'entrelacs $f_{red}^{-1}(0) \cap S_R^3$ peut fibrer sans que le multi-entrelacs $f^{-1}(0) \cap S_R^3$ ne fibre. Et inversement $f^{-1}(0) \cap S_R^3$ peut fibrer en multi-entrelacs sans que l'entrelacs $f_{red}^{-1}(0) \cap S_R^3$ ne soit fibré.

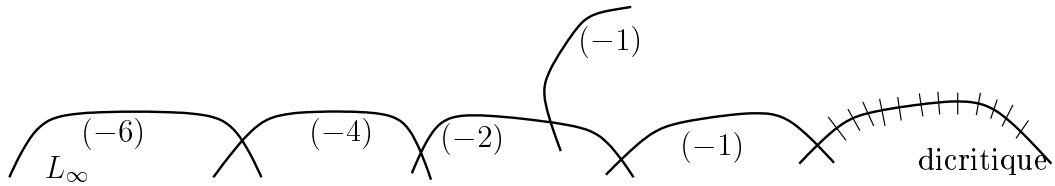


Fig. 14 - Résolution de $f(x, y) = y^2((1 + xy)^2 + x^2y)$ en P_2

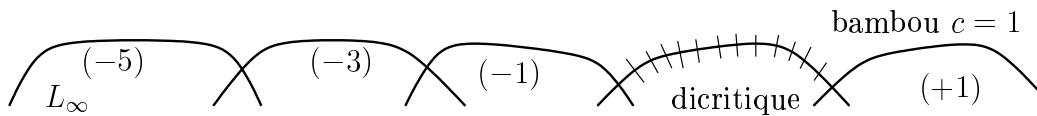


Fig. 15 - Résolution de $f_{red}(x, y) = y((1 + xy)^2 + x^2y)$ en P_2

4 Nombre de Milnor à l'infini

Soit f une application polynomiale réduite à deux variables complexes. Nous notons $\chi_3(0)$ la *caractéristique de Seifert* de l'entrelacs $K_0 = f^{-1}(0) \cap S_R^3$ ($R \gg 1$) : c'est le maximum des caractéristiques d'Euler des surfaces lisses orientées plongées dans S_R^3 dont le bord est K_0 . Notons également $\chi_4(0)$ la *caractéristique de Murasugi* de l'entrelacs K_0 : c'est le maximum des caractéristiques d'Euler des surfaces lisses orientées plongées dans B_R^4 dont le bord est K_0 . Rappelons que $\lambda(0)$ désigne le nombre de Milnor à l'infini pour la valeur 0 et $\chi(F_{gen})$ la caractéristique d'Euler de la fibre générique.

Proposition 4.7.

$$\chi_3(0) = \chi(F_{gen}) - \lambda(0) \quad ; \quad \chi_4(0) = \chi(F_{gen}) + \lambda(0)$$

$$\text{et } \chi_4(0) - \chi_3(0) = 2\lambda(0)$$

Remarque. On retrouve en particulier le résultat de [BF₈₈¹⁹] : les caractéristiques de Seifert et de Murasugi sont égales si et seulement si 0 est une valeur régulière à l'infini. Et dans ce cas $\chi_4(0) = \chi_3(0) = \chi(F_{gen})$.

Preuve. La démonstration est technique ; nous reprenons sans les expliciter les notations et les résultats de [EN₈₉⁹] et [Ne₈₉⁹] pour les *splice diagrams*. Notons $\chi(t) = \chi(f^{-1}(t))$. Pour un t générique :

$$\chi(t) = \sum_{\ell_v \geq 0} (2 - \delta_v) \ell_v.$$

Le nombre de Milnor à l'infini est donné par ([NW₀₀²⁰]) :

$$\lambda(0) = \sum_{\ell_v < 0} (2 - \delta_v) \ell_v.$$

La caractéristique de Seifert vérifie

$$\begin{aligned} \chi_3(0) &= \sum_{\ell_v} (2 - \delta_v) |\ell_v| \\ &= \sum_{\ell_v \geq 0} (2 - \delta_v) \ell_v - \sum_{\ell_v < 0} (2 - \delta_v) \ell_v, \end{aligned}$$

et donc

$$\chi_3(0) = \chi(t) - \lambda(0). \quad (\star)$$

De plus la formule de Suzuki est

$$\chi(0) - \chi(t) = \mu(0) + \lambda(0). \quad (\star\star)$$

Le théorème de Kronheimer et Mrowka (voir [BF₈₈¹⁹]) s'écrit dans notre contexte :

$$\chi_4(0) = \chi(0) - \mu(0). \quad (\star\star\star)$$

Les équations étoilées donnent

$$\chi_4(0) - \chi_3(0) = \chi(0) - \mu(0) - \chi(t) + \lambda(0) = 2\lambda(0).$$

□

Monodromie des entrelacs à l'infini

Dans ce chapitre nous explicitons la monodromie pour les entrelacs fibrés à l'infini, en donnant la formule du polynôme caractéristique de la monodromie algébrique ainsi que la valeur des twists de cette monodromie.

1 Monodromies

1.1 Monodromie géométrique

Soit M une variété de dimension 3. Supposons que $\theta : M \longrightarrow S^1$ soit une fibration localement triviale, notons \mathcal{F} une fibre de θ . La *monodromie géométrique* de la fibration θ est un difféomorphisme $h : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ tel que si l'on note \mathcal{M}_h le mapping-tore de h , c'est-à-dire

$$\mathcal{M}_h = \mathcal{F} \times [0, 1] / (x, 1) \sim (h(x), 0),$$

alors la fibration naturelle $p : \mathcal{M}_h \longrightarrow S^1$ est isomorphe à la fibration $\theta : M \longrightarrow S^1$. La monodromie est bien définie et unique à isotopie près.

1.2 Monodromie algébrique

La monodromie h induit une *monodromie algébrique* sur les groupes d'homologie :

$$h_* : H_*(\mathcal{F}) \longrightarrow H_*(\mathcal{F}).$$

Dans notre situation \mathcal{F} est de dimension réelle 2 et le *polynôme caractéristique* de la monodromie est

$$\Delta_h(t) = \det(h_1 - t.id).$$

1.3 Twists

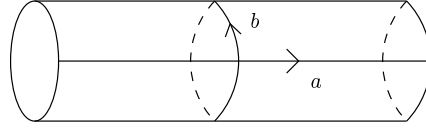


Fig. 16 – Cylindre \mathcal{C}

Soit un cylindre $\mathcal{C} = S^1 \times [0, 1]$; notons a le chemin orienté $\{1\} \times [0, 1]$ et b le lacet $S^1 \times \{\frac{1}{2}\}$ orienté de sorte que $a.b = +1$. Soit h un difféomorphisme de \mathcal{C} , supposons qu'il existe N minimal tel que h^N soit l'identité sur le bord de \mathcal{C} . Alors il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que

$$h^N(a) - a = r.Nb,$$

r est le *twist* de h sur \mathcal{C} .

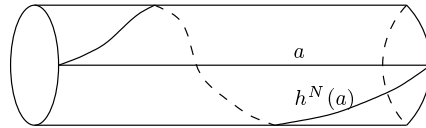


Fig. 17 – Twist de h sur \mathcal{C} (ici $r.N = +1$)

2 Calcul du polynôme caractéristique

Dans toute la suite $M = S_R^3 \setminus K_0$ avec $K_0 = f^{-1}(0) \cap S_R^3$ un entrelacs à l'infini fibré. Les notations sont celles utilisées précédemment et $\phi = \phi_t$ est la résolution totale de f . Nous considérons la monodromie h de la fibration

$$\theta = \frac{\phi}{|\phi|} : S \setminus \phi^{-1}(0) \longrightarrow S^1$$

pour la fibre $\mathcal{F} = \theta^{-1}(1)$. Les polynômes caractéristiques associés à la fibration de L et à θ sont les mêmes. Nous notons h_i la restriction de h à $\mathcal{F}_i = \mathcal{F} \cap \sigma(D_i)$, où D_i est une composante de $\pi_t^{-1}(L_\infty)$. D'après la formule d'A'Campo [A'C83], le polynôme caractéristique de h_i est :

$$\Delta_i(t) = (t^{|r_i|} - 1)(t^{|m_i|} - 1)^{v_i-2}.$$

Avec le vocabulaire de l'arbre dual les notations sont les suivantes : m_i est la multiplicité du sommet (si D_i est une composante dicritique nous notons abusivement m_i pour le degré de D_i), r_i le pgcd de m_i et des m_j avec j numérotant les sommets voisins de i , et v_i la valence du sommet i . Les flèches sont comptées comme des voisins.

Pour obtenir le polynôme caractéristique de la monodromie associé à la fibre de Milnor \mathcal{F} on utilise la suite exacte de Mayer-Vietoris. Si i et j sont deux sommets voisins alors :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_1(\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j) \rightarrow H_1(\mathcal{F}_i) \oplus H_1(\mathcal{F}_j) \rightarrow H_1(\mathcal{F}_i \cup \mathcal{F}_j) \rightarrow \\ \rightarrow H_0(\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j) \rightarrow H_0(\mathcal{F}_i) \oplus H_0(\mathcal{F}_j) \rightarrow H_0(\mathcal{F}_i \cup \mathcal{F}_j) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$H_2(\mathcal{F}_k)$ est nul car la surface \mathcal{F}_k possède des composantes de bord. Le polynôme $\Delta_{i,j}$ correspondant à la portion de fibre $\mathcal{F}_i \cup \mathcal{F}_j$ vérifie :

$$\begin{aligned} (t^{|m_i| \wedge |m_j|} - 1) \times \frac{1}{\Delta_i(t)\Delta_j(t)} \times \Delta_{i,j}(t) \times \frac{1}{t^{|m_i| \wedge |m_j|} - 1} \\ \times (t^{|r_i|} - 1)(t^{|r_j|} - 1) \times \frac{1}{t^{|r_i| \wedge |r_j|} - 1} = 1, \end{aligned}$$

donc

$$\Delta_{i,j}(t) = \Delta_i(t)\Delta_j(t) \frac{t^{|r_i| \wedge |r_j|} - 1}{(t^{|r_i|} - 1)(t^{|r_j|} - 1)}$$

ou encore par la formule d'A'Campo :

$$\Delta_{i,j}(t) = (t^{|r_i| \wedge |r_j|} - 1)(t^{|m_i|} - 1)^{v_i-2}(t^{|m_j|} - 1)^{v_j-2}.$$

Nous en déduisons le résultat suivant :

Proposition 5.1. Le polynôme caractéristique de h pour la fibre \mathcal{F} est

$$\Delta_h(t) = (t^r - 1) \prod_i (t^{|m_i|} - 1)^{v_i-2},$$

où $r = \text{pgcd}(|m_i|)$ est le nombre de composantes connexes de \mathcal{F} , i étant indexé sur les sommets de l'arbre dual.

On remarque que d'après le lemme 2.5, toute composante dicritique est de valence 2 ; donc les portions de fibre correspondant aux composantes dicritiques n'interviennent pas dans le calcul du polynôme caractéristique.

3 Calcul des twists

Notons $\mathcal{F}_i = \mathcal{F} \cap \sigma(D_i)$, $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j$ est composé de courbes $C_{i,j}^\lambda$ pour $\lambda = 1, \dots, \text{pgcd}(|m_i|, |m_j|)$. Soit $A_{i,j}^\lambda$ un anneau qui est un voisinage tubulaire de $C_{i,j}^\lambda$. Décomposons également \mathcal{F}_k pour D_k une composante dicritique ; \mathcal{F}_k est l'union disjointe de d_k anneaux B_k^λ ($\lambda = 1, \dots, d_k$; d_k est le degré du dicritique). Notons enfin

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i < j, \lambda} A_{i,j}^\lambda \cup \bigcup_{k, \lambda} B_k^\lambda.$$

Pour $N = \text{ppcm}(|m_i|)$, la restriction de h^N à $\mathcal{F} \setminus \mathcal{A}$ est l'identité. Calculons l'action de la monodromie sur les anneaux composant \mathcal{A} . Pour cela notons $\mathcal{F}_{crit} = \mathcal{F} \cap \sigma(D_{crit} = D_0)$, $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F} \cap \sigma(D_\infty)$, $\mathcal{F}_{dic} = \mathcal{F} \cap \sigma(D_{dic})$.

3.1 Twists pour \mathcal{F}_{crit}

Soit $0 < \eta \ll 1$ et $S_\eta^1(0)$ un petit cercle de \mathbb{C} centré en 0 et orienté positivement. Nous connaissons par [MW₂₀] les twists de la fibration

$$\phi : \phi^{-1}(S_\eta^1(0)) \longrightarrow S_\eta^1(0)$$

cette fibration se restreint en une fibration :

$$\phi : \phi^{-1}(S_\eta^1(0)) \cap \mathcal{V}(D_{crit}) \longrightarrow S_\eta^1(0)$$

($\mathcal{V}(X)$ désigne un voisinage de X). Cette dernière fibration est isomorphe, à orientation près, à

$$\theta_\parallel = \frac{\phi}{|\phi|} : S \setminus \phi^{-1}(0) \cap \mathcal{V}(D_{crit}) \longrightarrow S^1.$$

Les orientations de S (vu comme bord d'un voisinage de $\pi_t^{-1}(L_\infty)$) et de $\phi^{-1}(S_\eta^1(0))$ (vu comme bord de $\phi^{-1}(D_\eta^2(0))$) sont opposées. Donc les twists de θ_\parallel sont les opposés des twists de notre première fibration. Par la formule des twists de [MW₂₀] le twist r_{ij} associé à un anneau $A_{i,j}^\lambda$ de \mathcal{F}_{crit} est

$$r_{ij} = \frac{+1}{\text{ppcm}(|m_i|, |m_j|)}.$$

3.2 Twists pour \mathcal{F}_∞

Le procédé est similaire. La fibration

$$\phi : \phi^{-1}(S_\eta^1(\infty)) \longrightarrow S_\eta^1(\infty)$$

a ses twists connus; $S_\eta^1(\infty)$ est un petit cercle de $\mathbb{C}P^1$ centré en ∞ et orienté positivement pour ce point (*i.e.* $S_\eta^1(\infty)$ est orienté négativement comme cercle de $\mathbb{C} = \mathbb{C}P^1 \setminus \{\infty\}$). Elle induit la fibration

$$\phi : \phi^{-1}(S_\eta^1(\infty)) \cap \mathcal{V}(D_{crit}) \longrightarrow S_\eta^1(\infty).$$

Cette fibration, à orientation près, est isomorphe à

$$\theta_1 = \frac{\phi}{|\phi|} : S \setminus \phi^{-1}(0) \cap \mathcal{V}(D_\infty) \longrightarrow S^1.$$

Les orientations sont opposées car S^1 et $S_\eta^1(\infty)$ sont orientés différemment (mais S et $\phi^{-1}(S_\eta^1(\infty))$ sont orientés de la même façon). Toujours par la formule des twists de [MW²⁰] le twist de h associé à un anneau $A_{i,j}^\lambda$ de \mathcal{F}_∞ est donc :

$$r_{ij} = \frac{+1}{\text{ppcm}(|m_i|, |m_j|)}.$$

3.3 Twists pour \mathcal{F}_{dic}

Calcul pour $\mathcal{F}_{dic} \cap \mathcal{F}_{crit}$ et $\mathcal{F}_{dic} \cap \mathcal{F}_\infty$. Sur les anneaux $A_{i,j}^\lambda$, avec $D_i \subset D_{dic}$ et D_j une composante de D_{crit} ou de D_∞ , les twists de h sont nuls. En effet l'équation locale de ϕ est $\phi(u, v) = u^d$ avec d le degré de la composante dicritique. Par la décomposition de S en deux parties comme au paragraphe 2.4 de la page 19, l'action de h^d sur chacun des sous-anneaux $A_{i,j}^\lambda \cap T$ et $A_{i,j}^\lambda \cap T'$ est triviale.

Calcul pour \mathcal{F}_{dic} . Soit B_k^λ une composante connexe de \mathcal{F}_k pour D_k une composante dicritique de degré d_k et de classe d'Euler $-e_k$ (avec $-e_k < 0$). Montrons que le twist de h pour l'anneau B_k^λ est

$$s_k = -\frac{e_k}{d_k}.$$

Considérons le fibré en cercle induit par D_k comme le recollement de deux fibrés triviaux. Soient \mathcal{D}_1 un disque centré en $\infty \in \mathbb{C}P^1$ et \mathcal{D}_2 un disque centré en 0. Le fibré trivial sur \mathcal{D}_i est donné par le produit

$$(u_i, v_i) \in \mathcal{D}_i \times S^1.$$

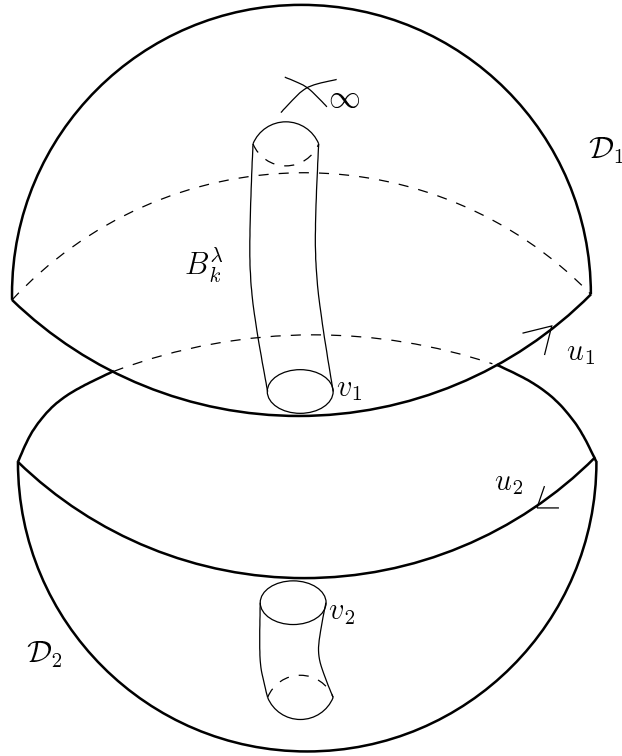


Fig. 18 – Recollement des fibrés triviaux

Pour obtenir le fibré en cercles correspondant à D_k , de classe d'Euler $-e_k$, le recollement des bords $\partial\mathcal{D}_1$ et $\partial\mathcal{D}_2$ est le suivant :

$$\begin{cases} u_2 &= \frac{1}{u_1}, \\ v_2 &= u_1^{e_k} v_1. \end{cases}$$

Pour obtenir ce qui se passe au recollement nous épaississons sous la forme

$$(u_1, v_1, t) \in S^1 \times S^1 \times I.$$

Nous avons $I = [0, 1]$, $S^1 \times \{1\} \times \{\frac{1}{2}\}$ correspond à $\partial\mathcal{D}_1 = -\partial\mathcal{D}_2$, et $S^1 \times \{1\} \times I$ est une bande voisinage de $\partial\mathcal{D}_1$. Le second S^1 paramétrisé par v_1 correspond à la fibre du fibré en cercles. Dans ce modèle l'anneau B_k^λ s'écrit $\{1\} \times S^1 \times I$. Notons a le chemin $\{1\} \times \{1\} \times I$ et b le lacet $\{1\} \times S^1 \times \{1\}$. Soient $A = (1, 1, 0)$ et $B = (1, 1, 1)$. La monodromie h permute les d_k composantes connexes de \mathcal{F}_k et h^{d_k} conserve ces composantes connexes. De plus h^{d_k} conserve l'anneau B_k^λ point par point. Faire « un tour en bas » sur le S^1 de $\theta : S \setminus \phi^{-1}(0) \rightarrow S^1$ correspond dans notre modèle à un tour sur $S^1 \times \{1\} \times \{\frac{1}{2}\} = \partial\mathcal{D}_1 = -\partial\mathcal{D}_2$.

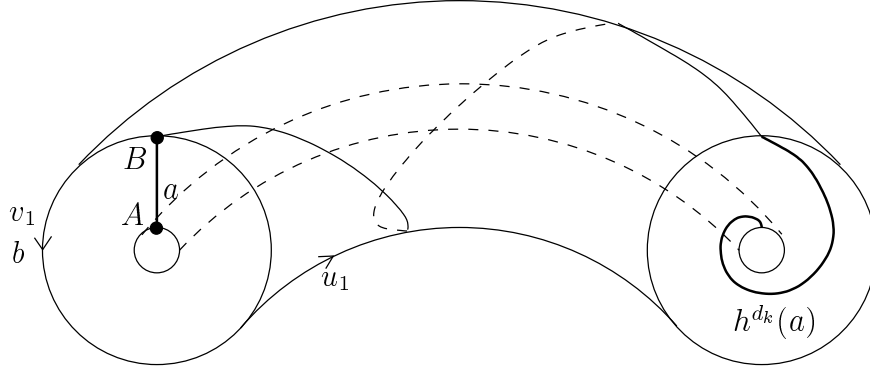


Fig. 19 – Twist au-dessus du dicritique

La fibre de θ vue dans notre modèle qui contient le point $A = (1, 1, 0)$ est la fibre

$$\{(u_1, u_1^{te_k}, t) \mid u_1 \in S^1, t \in I\}.$$

La portion de cette fibre avec t fixé qui contient le point $A = (1, 1, 0)$ est l'ensemble $\{(u_1, 1, 0) \mid u_1 \in S^1\}$ et celle qui contient $B = (1, 1, 1)$ est $\{(u_1, u_1^{e_k}, 1) \mid u_1 \in S^1\}$. Le chemin $a = \{1\} \times \{1\} \times I$ a donc pour image par h^{d_k} dans $B_k^\lambda = \{1\} \times S^1 \times I$ le chemin $a' = a + (-e_k)b$. D'où le twist de h pour l'anneau $B_k^\lambda : s_k = -\frac{e_k}{d_k}$.

Rassemblons les résultats obtenus :

Théorème 5.2. Pour $a \in H_1(\mathcal{F})$, notons I la forme d'intersection sur \mathcal{F} et N le ppcm des valeurs absolues des multiplicités, alors

$$h(a) = a + N \cdot \sum_{i < j, \lambda} r_{ij} I(a, A_{i,j}^\lambda) [A_{i,j}^\lambda] + N \cdot \sum_{k, \lambda} s_k I(a, B_k^\lambda) [B_k^\lambda]$$

avec

$$r_{ij} = \frac{+1}{\text{ppcm}(|m_i|, |m_j|)}, \quad s_k = -\frac{e_k}{d_k}.$$

Remarque. À la différence du cas local, les twists peuvent être positifs ou négatifs. De plus il arrive qu'entre deux sommets de valence 3 dans $\pi^{-1}(L_\infty) \cup \phi^{-1}(0)$ il y ait un twist nul provenant de l'annulation des twists positifs et négatifs.

4 Exemples

4.1 Polynôme caractéristique de la monodromie

L'exemple traité ici est l'exemple du paragraphe 3 du chapitre 2.

Les deux seuls sommets à regarder sont les sommets de multiplicités -6 et 12 , tous les autres sont de valence 2 . Leurs polynômes respectifs, notés Δ_∞ et Δ_0 , sont

$$\Delta_\infty = (t-1)(t^6-1)^3, \quad \Delta_0 = (t-1)(t^{12}-1).$$

Pour obtenir le polynôme caractéristique de la monodromie associé à la fibre de Milnor $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty \cup \mathcal{F}_0$ on utilise la suite exacte de Mayer-Vietoris. (comme \mathcal{F}_{dic} n'intervient pas pour le calcul, il est plus simple de considérer que $\mathcal{F}_{dic} \subset \mathcal{F}_\infty$).

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_1(\mathcal{F}_0 \cap \mathcal{F}_\infty) \rightarrow H_1(\mathcal{F}_0) \oplus H_1(\mathcal{F}_\infty) \rightarrow H_1(\mathcal{F}) \rightarrow \\ \rightarrow H_0(\mathcal{F}_0 \cap \mathcal{F}_\infty) \rightarrow H_0(\mathcal{F}_0) \oplus H_0(\mathcal{F}_\infty) \rightarrow H_0(\mathcal{F}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$\mathcal{F}_0 \cap \mathcal{F}_\infty$ est la réunion de deux cercles permutés par la monodromie et les fibres \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_∞ sont connexes donc, si $\Delta(t)$ est le polynôme pour \mathcal{F} alors :

$$(t^2-1) \times \frac{1}{\Delta_0(t)\Delta_\infty(t)} \times \Delta(t) \times \frac{1}{t^2-1} \times (t-1)(t-1) \times \frac{1}{t-1} = 1,$$

donc

$$\Delta(t) = \frac{\Delta_0(t)\Delta_\infty(t)}{t-1},$$

et par suite

$$\Delta(t) = (t-1)(t^6-1)^3(t^{12}-1).$$

4.2 Twists de la monodromie

Les formules données au-dessus permettent de calculer les twists entre deux sommets voisins, ainsi que les twists au-dessus des composantes dicritiques. Les résultats sont donnés sur la figure 20.

Nous en déduisons le *twist résultant* entre les deux portions de fibres correspondant au sommet de valence supérieure ou égale à 3 . La valeur de ce twist est la somme des twists compris entre les deux sommets.

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{4} + (-1) + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{40} + \frac{1}{60} = -\frac{1}{4}.$$

De plus les twists entre le sommet de multiplicité 12 et les transformées strictes qui y sont attachées ont pour valeur

$$\frac{1}{\text{ppcm}(1, 12)} = +\frac{1}{12}.$$

Entre le sommet de multiplicité -6 et l'une des quatre transformées strictes le twist résultant est

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{20} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + (-1) = -\frac{1}{6}.$$

Voir la figure 21.

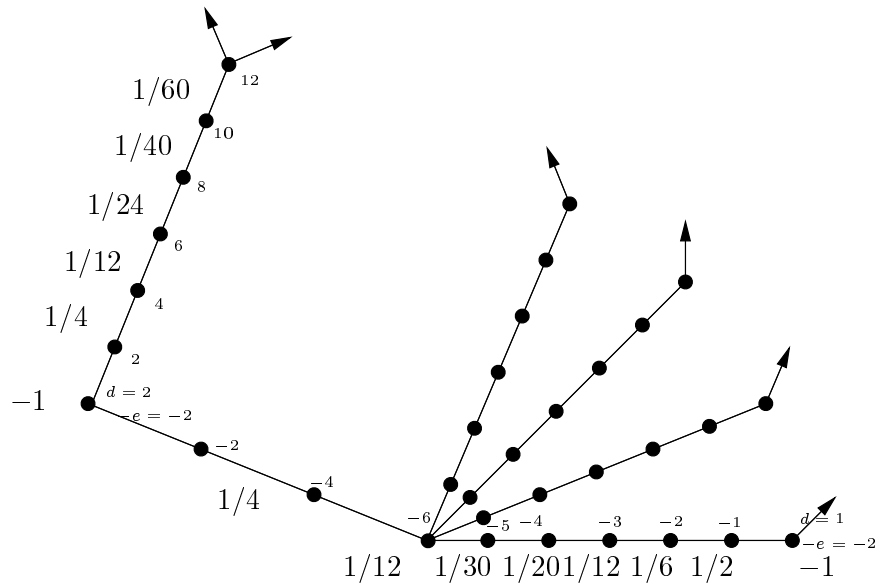


Fig. 20 – Exemple de calcul de twists

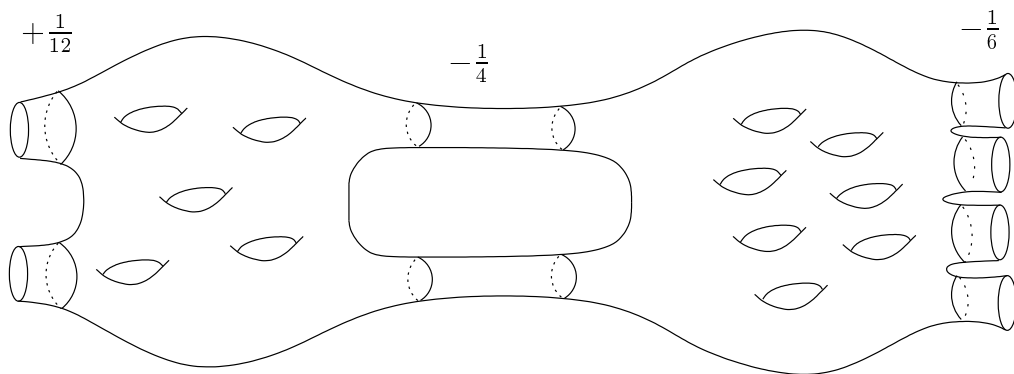


Fig. 21 – Twists résultants

Fibre irrégulière dans le tube

Nous étudions ici le plongement de la fibre irrégulière dans le tube. Nous généralisons les résultats de E. Artal, P. Cassou-Noguès et A. Dimca [ACD_{ss}⁹³] et donnons des critères facilement calculables pour que l'application induite par le plongement en homologie soit injective ou surjective.

Soit $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ une application polynomiale. Nous supposons que le polynôme f est primitif, c'est-à-dire que la fibre générique est connexe. Soit $c \in \mathbb{C}$ une valeur irrégulière de f . Soit $R \gg 1$ un réel suffisamment grand tel que l'intersection $f^{-1}(c) \cap S_r^3$ soit transverse pour $r \geq R$. Soit maintenant $\delta \ll 1$ un réel strictement positif suffisamment petit. Soit $D_\delta^2(c)$ un disque centré en c et notons $T_c = f^{-1}(D_\delta^2(c))$ le tube, voisinage de la fibre irrégulière $F_c = f^{-1}(c)$. Notons également F_{gen} une fibre régulière du tube T_c , par exemple $F_{gen} = f^{-1}(\delta')$ si $\delta' = c + \delta$.

Nous rappelons d'abord dans un premier paragraphe quelques propriétés du tube.

1 Étude du tube

Notons $n(F_c)$ le nombre de composantes connexes de la fibre F_c . La proposition suivante provient essentiellement de [ACD_{ss}⁹³].

Proposition 6.1. Soit $b_q = \dim H_q(T_c)$.

$$\begin{aligned} b_q &= 0, \text{ pour } q \geq 2; \\ b_1 &= 1 - n(F_c) + \dim H_1(F_c); \\ b_0 &= 1. \end{aligned}$$

Preuve. Notons $D = D_\delta^2(c)$ et D' l'image d'un plongement d'un disque fermé dans \mathbb{C} tel que l'intérieur de $D \cup D'$ contienne l'ensemble B des valeurs irrégulières et tel que $D \cap D' = \{\delta'\}$. Comme $D \cup D'$ est un rétracte de \mathbb{C} alors $f^{-1}(D \cup D')$ est un rétracte de \mathbb{C}^2 . La suite exacte de Mayer-Vietoris pour la décomposition $f^{-1}(D) \cup f^{-1}(D')$ donne alors :

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_{q+1}(f^{-1}(D \cup D')) &\rightarrow H_q(f^{-1}(D) \cap f^{-1}(D')) \rightarrow \\ &\rightarrow H_q(f^{-1}(D)) \oplus H_q(f^{-1}(D')) \rightarrow H_q(f^{-1}(D \cup D')) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Autrement dit pour $q \geq 1$:

$$0 \rightarrow H_q(F_{gen}) \rightarrow H_q(T_c) \oplus H_q(f^{-1}(D')) \rightarrow 0 \quad (\star)$$

Mais pour $q \geq 2$, $H_q(F_{gen}) = \{0\}$ et donc $H_q(T_c) = \{0\}$.

Comme le polynôme f est primitif, la fibre générique est connexe et donc le tube T_c est connexe également, d'où $b_0 = 1$.

La caractéristique d'Euler est ici additive [Fu⁹³, p. 95] :

$$\chi(T_c) = \chi(T_c \setminus F_c) + \chi(F_c).$$

De plus la projection $T_c \setminus F_c \longrightarrow D_\delta^2 \setminus \{c\}$ est une fibration localement triviale et

$$\chi(T_c \setminus F_c) = \chi(F_{gen}) \times \chi(D_\delta^2 \setminus \{c\}),$$

or $D_\delta^2 \setminus \{c\}$ a le même type d'homotopie que S_δ^1 et est donc de caractéristique d'Euler nulle. Par conséquent

$$\chi(T_c) = \chi(F_c).$$

Or $\chi(F_c) = \dim H_0(F_c) - \dim H_1(F_c) = n(F_c) - \dim H_1(F_c)$. Par suite $b_1 = b_0 - \chi(T_c) = 1 - n(F_c) + \dim H_1(F_c)$. \square

Corollaire 6.2.

$$H_1(T_c) = \{0\} \iff B \subset \{c\}.$$

Preuve. Comme le tube est connexe, $\chi(T_c) = 1 - b_1$. De plus $\chi(T_c) = \chi(F_c)$ donc

$$b_1 = 0 \iff \chi(F_c) = 1 \iff B \subset \{c\}.$$

La dernière équivalence est prouvée à la page 89 du chapitre 9. \square

2 Fibre irrégulière dans le tube

2.1 Préliminaires

Le reste du chapitre est consacré à l'étude du plongement de la fibre irrégulière F_c dans le tube T_c ; nous notons $j_c : H_1(F_c) \longrightarrow H_1(T_c)$ le morphisme induit sur les groupes d'homologie. Nous supposons que f est un polynôme primitif et que la fibre F_c est réduite. Le résultat principal est :

Théorème 6.3. Si c est une valeur irrégulière à l'infini de f alors le morphisme $j_c : H_1(F_c) \longrightarrow H_1(T_c)$ n'est pas bijectif.

Remarque. La réciproque est vraie d'après l'isomorphisme j_{aff} ci-dessous. Un contre-exemple est le polynôme $f(x, y) = x^2$ qui n'est pas primitif mais nous obtenons un isomorphisme entre $H_1(F_0) = \{0\}$ et $H_1(T_0) = \{0\}$.

Le cas particulier où la fibre spéciale F_c est connexe a été étudié dans [ACD^{§§}]. Nous généralisons ici cette étude après avoir rappelé les notations utilisées dans cet article. En fait nous allons donner des critères simples pour déterminer si j_c est injectif ou surjectif.

Soit R un réel défini comme dans l'introduction de ce chapitre. Nous notons $F_{\text{aff}} = F_c \cap B_R^4$ et $F_\infty = \overline{F_c} \setminus F_{\text{aff}}$, ainsi $F_{\text{aff}} \cap F_\infty = K_c = f^{-1}(c) \cap S_R^3$. De même $T_{\text{aff}} = T_c \cap B_R^4$ et $T_\infty = \overline{T_c} \setminus T_{\text{aff}}$. Notons $j_\infty : H_1(F_\infty) \longrightarrow H_1(T_\infty)$ le morphisme donné par l'inclusion de F_∞ dans T_∞ . L'application $j_{\text{aff}} : H_1(F_{\text{aff}}) \longrightarrow H_1(T_{\text{aff}})$ est un isomorphisme ([ACD^{§§}]). De même $H_1(F_{\text{aff}} \cap F_\infty)$ est isomorphe à $H_1(T_{\text{aff}} \cap T_\infty)$.

Le diagramme (\mathcal{D}) de suites exactes suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H_1(F_\infty \cap F_{\text{aff}}) & \xrightarrow{g} & H_1(F_\infty) \oplus H_1(F_{\text{aff}}) & \xrightarrow{h} & H_1(F_c) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \cong & & \downarrow j_\infty \oplus j_{\text{aff}} & & \downarrow j_c \\
 0 & \longrightarrow & H_1(T_\infty \cap T_{\text{aff}}) & \xrightarrow{g'} & H_1(T_\infty) \oplus H_1(T_{\text{aff}}) & \xrightarrow{h'} & H_1(T_c) \longrightarrow H_0(T_\infty \cap T_{\text{aff}}).
 \end{array}$$

Ce diagramme provient des suites exactes de Mayer-Vietoris pour les décompositions $F_c = F_{\text{aff}} \cup F_\infty$ et $T_c = T_{\text{aff}} \cup T_\infty$, les flèches verticales proviennent des inclusions. Le 0 en haut à droite du diagramme vient du fait que l'application $H_0(F_\infty \cap F_{\text{aff}}) \longrightarrow H_0(F_\infty)$ est injective (que F_c soit connexe ou non) donc la flèche $H_0(F_\infty \cap F_{\text{aff}}) \longrightarrow H_0(F_\infty) \oplus H_0(F_{\text{aff}})$ dans la suite exacte de Mayer-Vietoris est injective.

2.2 Étude de j_∞

Cette étude a été faite dans [ACD₀₃]. Soit ϕ la résolution faible associée à f . Nous notons Dic_c l'ensemble des points P des composantes dicritiques tels que $\phi(P) = c$. À chaque $P \in \text{Dic}_c$ est associée une et une seule composante connexe T_P de T_∞ ; T_P est le lieu à l'infini de P . Nous écrivons $T_\infty = \coprod_{P \in \text{Dic}_c} T_P$ et notons $F_P = T_P \cap F_\infty = T_P \cap F_c$ et $K_P = \partial F_P$. Enfin $n(F_P)$ désigne le nombre de composantes connexes de F_P . Soit \bar{F}_P la transformée stricte de $\phi^{-1}(c)$ intersectée avec T_P .

L'étude de j_∞ se ramène à l'étude de $j_P : H_1(F_P) \longrightarrow H_1(T_P)$. Notons m_P la multiplicité d'intersection en P de \bar{F}_P et du diviseur.

Cas où $P \in \bar{F}_P$. Le groupe d'homologie $H_1(T_P)$ est isomorphe à \mathbb{Z} et est engendré par $[M_P]$, pour M_P désignant le bord d'une curvette du dicritique. De plus si $F_P = \coprod_{i=1}^{n(F_P)} F_P^i$ alors $j_P[F_P^i] = j_P[K_P^i] = m_P^i [M_P]$.

Cas où P appartient à un bambou. Le groupe d'homologie $H_1(T_P)$ est également isomorphe à \mathbb{Z} et est engendré par $[M_P]$, pour M_P désignant le bord d'une curvette accrochée à l'extrémité du bambou. Alors $j_P[F_P^i] = j_P[K_P^i] = m_P^i \cdot \ell_k [M_P]$. L'entier ℓ_k ne dépend que de la position k sur le bambou où s'accroche F_P^i . De plus $\ell_k \geq 1$ et $\ell_k = 1$ seulement pour la dernière composante irréductible du bambou.

En conséquence j_P est injectif si et seulement si $n(F_P) = 1$ et j_∞ est injectif si et seulement si $n(F_P) = 1$ quelque soit $P \in \text{Dic}_c$. En fait la dimension du noyau j_∞ est la somme des dimensions des noyaux de j_P et donc

$$\dim \ker j_\infty = \sum_{P \in \text{Dic}_c} (n(F_P) - 1).$$

Savoir si j_∞ est surjectif ou pas se déduit facilement des morphismes j_P .

Preuve du théorème 6.3. Nous donnons ici la preuve du théorème 6.3, même si la démonstration utilise les résultats qui seront démontrés par la suite dans ce chapitre. Supposons c valeur irrégulière à l'infini et j_∞ injectif, montrons que j_∞ n'est pas surjectif. Soit P un point de Dic_c qui contribue à l'irrégularité à l'infini de c , comme j_∞ est injectif alors $n(F_P) = 1$. Il suffit de montrer que le morphisme j_P associé n'est pas surjectif. En effet dans le cas où $P \in \bar{F}_P$ la multiplicité d'intersection m_P vérifie $m_P > 1$. Dans le second cas, P appartient à un bambou et alors $m_P \cdot \ell_k > 1$: le seul cas à considérer est le cas où sur le bambou s'accroche une seule transformée stricte et ce sur la dernière composante irréductible du bambou, ce qui est exclu par le lemme 4.3 des bambous. Nous venons de prouver que j_∞ ne peut être à la fois injectif et surjectif.

Montrons par l'absurde que j_c n'est pas un isomorphisme. D'après le lemme 6.7 si j_c est injectif alors j_∞ est injectif. Par la proposition 6.9 si j_c est surjectif alors j_∞ est aussi surjectif. Donc j_∞ est injectif et surjectif ce qui contredit le paragraphe précédent. \square

2.3 Acyclicité

Nous dirons que la valeur c est *acyclique* si le morphisme $\psi : H_0(T_\infty \cap T_{\text{aff}}) \longrightarrow H_0(T_\infty) \oplus H_0(T_{\text{aff}})$ donné par la suite exacte de Mayer-Vietoris est injectif.

Nous allons donner des interprétations de la condition d'acyclité.

1. L'injectivité de ψ s'interprète de la façon suivante : deux branches à l'infini qui s'accrochent en un même lieu à l'infini ne doivent pas être dans la même composante connexe de F_c . Autrement dit, notons G_c le *graphe dual* de $F_c = f^{-1}(c)$ (un sommet par composante irréductible de $f^{-1}(c)$ et deux sommets reliés par une arête si les composantes irréductibles associées s'intersectent) et $G_{c,P}$ le graphe obtenu à partir de G_c en reliant les sommets correspondant à un même lieu à l'infini T_P . Alors il ne doit pas apparaître de nouveaux cycles *i.e.* $H_1(G_c) \cong H_1(G_{c,P})$ quelque soit $P \in \text{Dic}_c$.
2. La condition c est acyclique est équivalente à la surjectivité du morphisme h' du diagramme (\mathcal{D}) . Ceci se prouve grâce à la suite exacte :

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_1(T_\infty) \oplus H_1(T_{\text{aff}}) \xrightarrow{h'} H_1(T_c) \xrightarrow{\varphi} H_0(T_\infty \cap T_{\text{aff}}) \xrightarrow{\psi} \\ \xrightarrow{\psi} H_0(T_\infty) \oplus H_0(T_{\text{aff}}) \longrightarrow H_0(T_c) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

3. Voici un exemple où la condition d'acyclité est toujours vérifiée : si $n(F_P) = 1$ quelque soit $P \in \text{Dic}_c$ alors $H_0(T_\infty \cap T_{\text{aff}}) \cong H_0(T_\infty)$ et ψ est injectif.
4. Regardons maintenant la suite exacte de Mayer-Vietoris comme ci-dessus mais en homologie réduite et considérons le morphisme $\tilde{\psi} : \tilde{H}_0(T_\infty \cap T_{\text{aff}}) \longrightarrow \tilde{H}_0(T_\infty) \oplus \tilde{H}_0(T_{\text{aff}})$. Alors $\tilde{\psi}$ est injectif si et seulement si ψ l'est. De plus, comme $\tilde{H}_0(T_c) = \{0\}$ (car f est primitif donc T_c est connexe), alors $\tilde{\psi}$ est surjectif.

Comme $\tilde{\psi}$ est surjectif, l'injectivité de $\tilde{\psi}$ ne dépend que des dimensions des espaces de départ et d'arrivée, or

$$\begin{aligned} \dim H_0(T_\infty \cap T_{\text{aff}}) &= \sum_{P \in \text{Dic}_c} n(F_P), \\ \dim H_0(T_\infty) &= \text{Card Dic}_c, \\ \dim H_0(T_{\text{aff}}) &= n(F_c). \end{aligned}$$

où $n(F)$ désigne le nombre de composantes connexes de F . Par conséquent $\tilde{\psi}$ est injectif si et seulement si $\dim \tilde{H}_0(T_\infty \cap T_{\text{aff}}) = \dim \tilde{H}_0(T_\infty) + \dim \tilde{H}_0(T_{\text{aff}})$. Et donc c est acyclique si et seulement si

$$\sum_{P \in \text{Dic}_c} n(F_P) - 1 = \text{Card Dic}_c - 1 + n(F_c) - 1. \quad (\star\star)$$

Nous en déduisons le lemme suivant :

Lemme 6.4.

$$j_\infty \text{ injectif} \iff F_c \text{ est connexe et } c \text{ acyclique.}$$

Preuve. Si j_∞ est injectif alors $n(F_P) = 1$ quelque soit P de Dic_c , donc c est acyclique et d'après la relation $(\star\star)$, $n(F_c) = 1$ i.e. F_c est connexe.

Réciproquement c acyclique et $n(F_c) = 1$ donnent dans la relation $(\star\star)$, $n(F_P) = 1$ pour $P \in \text{Dic}_c$, soit j_∞ injectif. \square

Définissons maintenant une notion plus forte d'acyclicité. Soit \bar{G}_c le graphe dual de $\phi^{-1}(c)$, ϕ étant associé à la résolution totale de f . Le graphe \bar{G}_c s'obtient à partir de G_c en reliant les sommets correspondant à un même lieu à l'infini T_P pour tout P dans Dic_c . Nous dirons que c est *fortement acyclique* si $H_1(\bar{G}_c) \cong H_1(G_c)$. Si c est fortement acyclique alors c est acyclique, mais la réciproque est fausse *a priori*. Cependant si F_c est connexe (c'est-à-dire G_c est connexe) alors les deux conditions d'acyclicité sont équivalentes. Ceci s'exprime implicitement dans l'égalité suivante qui est juste un résultat sur les graphes (le graphe \bar{G}_c est connexe car T_c est connexe) :

Lemme 6.5.

$$\dim H_1(\bar{G}_c) - \dim H_1(G_c) = \sum_{P \in \text{Dic}_c} (n(F_P) - 1) - (n(F_c) - 1).$$

3 Injectivité et surjectivité de j_c

3.1 Injectivité

Proposition 6.6.

$$j_c \text{ injectif} \iff F_c \text{ connexe et } c \text{ acyclique.}$$

Cette proposition découle du lemme 6.4 et du lemme suivant.

Lemme 6.7.

$$j_c \text{ injectif} \iff j_\infty \text{ injectif.}$$

De plus la dimension du noyau est donnée par l'une des formules :

$$\begin{aligned} \dim \ker j_c &= \dim \ker j_\infty \\ &= \sum_{P \in \text{Dic}_c} (n(F_P) - 1) \\ &= n(F_c) - 1 + \dim H_1(\tilde{G}_c) - \dim H_1(G_c). \end{aligned}$$

Preuve. La première partie de ce lemme peut se démontrer par une version affaiblie du lemme des cinq (une version similaire à celle qui sera utilisée pour la surjectivité de j_c). En fait nous allons seulement démontrer l'égalité des dimensions de $\ker j_c$ et de $\ker j_\infty$ ce qui impliquera bien évidemment l'équivalence de l'injectivité de j_c et de j_∞ . Nous aurons alors terminé car nous savons déjà que

$$\dim \ker j_\infty = \sum_{P \in \text{Dic}_c} (n(F_P) - 1)$$

et par la relation du lemme 6.5 nous obtenons

$$\dim \ker j_\infty = (n(F_c) - 1) + \dim H_1(\tilde{G}_c) - \dim H_1(G_c).$$

Étudier le morphisme $j_c : H_1(F_c) \longrightarrow H_1(T_c)$ revient à étudier le morphisme induit par l'inclusion de $H_1(T_{\text{aff}}) \longrightarrow H_1(T_c)$ que nous noterons (abusivement) encore j_c . En effet F_c s'obtient à partir de $F_{\text{aff}} = F_c \cap B_R^4$ en recollant un morceau $(f^{-1}(0) \cap S_R^3) \times [0, +\infty[$ et donc le morphisme induit par l'inclusion $H_1(F_{\text{aff}}) \longrightarrow H_1(F_c)$ est un isomorphisme, et enfin le morphisme $j_{\text{aff}} : H_1(F_{\text{aff}}) \longrightarrow H_1(T_{\text{aff}})$ est un isomorphisme. Écrivons la suite exacte de la paire (T_c, T_{aff}) :

$$H_2(T_c) \longrightarrow H_2(T_c, T_{\text{aff}}) \longrightarrow H_1(T_{\text{aff}}) \xrightarrow{j_c} H_1(T_c)$$

mais $H_2(T_c) = 0$ (proposition 6.1) donc la dimension de $\ker j_c$ est la dimension de $H_2(T_c, T_{\text{aff}})$.

D'autre part l'étude de $j_\infty : H_1(F_\infty) \longrightarrow H_1(T_\infty)$ est la même que l'étude du morphisme induit par l'inclusion $H_1(\partial T_\infty) \longrightarrow H_1(T_\infty)$ noté encore j_∞ . En effet les morphismes induits par les inclusions $H_1(\partial F_\infty) \longrightarrow H_1(F_\infty)$ et $H_1(\partial F_\infty) \longrightarrow H_1(\partial T_\infty)$ sont des isomorphismes. La suite exacte de la paire $(T_\infty, \partial T_\infty)$ s'écrit alors

$$H_2(T_\infty) \longrightarrow H_2(T_\infty, \partial T_\infty) \longrightarrow H_1(\partial T_\infty) \xrightarrow{j_\infty} H_1(T_\infty)$$

et comme $H_2(T_\infty) = 0$ (voir [ACD₉₈]) alors la dimension de $\ker j_\infty$ est égale à celle de $H_2(T_\infty, \partial T_\infty)$.

Finalement comme les espaces $H_2(T_\infty, \partial T_\infty)$ et $H_2(T_c, T_{\text{aff}})$ sont isomorphes par excision alors les dimensions de $\ker j_c$ et de $\ker j_\infty$ sont égales, ce qui termine la preuve. \square

Nous allons prouver un résultat un peu différent qui permet d'obtenir le noyau de j_c . Soit s un cycle de F_∞ et $[s]_\infty \in H_1(F_\infty)$ alors il est possible de considérer la classe de s dans $H_1(F_c) : [s]$.

Lemme 6.8. Si $[s]_\infty \in \text{Ker } j_\infty$ alors $[s] \in \text{Ker } j_c$. Réciproquement si $[s] \in \text{Ker } j_c$ il existe s' dans F_∞ tel que $[s] = [s']$ et $[s']_\infty \in \text{Ker } j_\infty$.

Preuve. Soit $[s]_\infty \in \text{Ker } j_\infty$, le diagramme suivant (tiré de (\mathcal{D})) montre que $[s]$ appartient au noyau de j_c :

$$\begin{array}{ccc} [s]_\infty \oplus 0 & \longrightarrow & [s] \\ \downarrow j_\infty \oplus j_{\text{aff}} & & \downarrow j_c \\ 0 \oplus 0 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Soit $\sigma \in \text{Ker } j_c$, il existe $\alpha \oplus \beta$ tel que $h(\alpha \oplus \beta) = \sigma$; nous notons $\alpha' \oplus \beta' = j_\infty \oplus j_{\text{aff}}(\alpha \oplus \beta)$ et soit γ' un antécédent de $\alpha' \oplus \beta'$ par g' . Nous associons à γ' un élément γ de $H_1(T_\infty \cap T_{\text{aff}})$. Nous avons le diagramme suivant tiré de (\mathcal{D}) :

$$\begin{array}{ccccccc} \gamma & & \alpha \oplus \beta & \xrightarrow{h} & \sigma & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow j_\infty \oplus j_{\text{aff}} & & \downarrow j_c & & \\ \gamma' & \xrightarrow{g'} & \alpha' \oplus \beta' & \longrightarrow & 0 & & \end{array}$$

Notons $\bar{\alpha} \oplus \bar{\beta} = g(\gamma)$, alors $j_\infty \oplus j_{\text{aff}}(\alpha \oplus \beta) = \alpha' \oplus \beta' = j_\infty \oplus j_{\text{aff}}(\bar{\alpha} \oplus \bar{\beta})$; comme j_{aff} est un isomorphisme $\beta = \bar{\beta}$. Soit maintenant $[\bar{s}]_\infty$ l'élément $\alpha - \bar{\alpha}$, alors $j_\infty([\bar{s}]_\infty) = 0$ et $[\bar{s}] = h(\alpha - \bar{\alpha} \oplus 0) = h(\alpha \oplus \beta) - h(\bar{\alpha} \oplus \bar{\beta}) = \sigma - 0$. \square

3.2 Surjectivité

Proposition 6.9.

$$j_c \text{ surjectif} \iff j_\infty \text{ surjectif et } c \text{ acyclique.}$$

Preuve. Supposons j_c surjectif, alors d'après une version du lemme des cinq prouvée ci-dessous, j_∞ est surjectif. Comme j_c et j_∞ sont surjectifs, le diagramme commutatif

(\mathcal{D}) implique que le morphisme $h' : H_1(T_\infty) \oplus H_1(T_{\text{aff}}) \longrightarrow H_1(T)$ est surjectif, ce qui est équivalent à c acyclique.

Réciproquement si j_∞ est surjectif et c acyclique, alors h' est surjectif et le diagramme (\mathcal{D}) implique j_c surjectif. \square

Voici la démonstration du lemme des cinq qui a servi précédemment.

Soit le diagramme commutatif de suites exactes (a est un isomorphisme) :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \cong \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D'. \end{array}$$

Lemme 6.10.

$$c \text{ surjectif} \implies b \text{ surjectif.}$$

Preuve. Soit $\beta' \in B'$ et $\gamma' = g'(\beta')$. Comme c est surjectif, il existe $\gamma \in C$ tel que $c(\gamma) = \gamma'$, mais g est surjectif : il existe $\beta \in B$ avec $g(\beta) = \gamma$. Montrons $b(\beta) - \beta' \in \text{Im } b$. En effet : $g'(b(\beta) - \beta') = g' \circ b(\beta) - g'(\beta') = c \circ g(\beta) - \gamma' = \gamma - \gamma' = 0$. Donc il existe $\alpha' \in A'$ tel que $f'(\alpha') = b(\beta) - \beta'$ et il existe aussi α tel que $a(\alpha) = \alpha'$. Ainsi $b \circ f(\alpha) = f' \circ a(\alpha) = f'(\alpha') = b(\beta) - \beta'$. Donc $\beta' = b(\beta - f(\alpha))$ et b est surjectif. \square

Cycles invariants

Nous donnons un théorème des cycles invariants en homologie. Soit $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ une application polynomiale à singularités affines isolées. Soit $c \in B$ une valeur irrégulière¹. Nous notons h_c la monodromie algébrique induite par la fibration $f : \mathbb{C}^n \setminus f^{-1}(B) \rightarrow \mathbb{C} \setminus B$ pour un petit cercle $S_\varepsilon^1(c)$. Nous montrons que les cycles invariants $\text{Ker}(h_c - id)$ sont l'image de la fibre spéciale, privée des singularités, dans $H_q(F_{gen})$.

1 Diagramme $jk\ell$

1.1 Plongement de la fibre spéciale dans la fibre générique

Soit $F_c = f^{-1}(c)$. Par hypothèse les singularités affines de F_c sont isolées. Soit donc $B_1^{2n}, \dots, B_p^{2n}$ des petites boules ouvertes centrées en ces singularités. Notons $B_\cup = B_1^{2n} \cup \dots \cup B_p^{2n}$ et B_R^{2n} une boule fermée de rayon $R \gg 1$. La *partie compacte lisse* de F_c est $F_c^\circ = F_c \cap B_R^{2n} \setminus B_\cup$.

Il est possible de plonger F_c° dans la fibre générique F_{gen} (voir [MW²⁰] et [NN^{'20}]). Comme F_c est transverse aux boules constituant B_\cup et à B_R^{2n} alors il existe ε suffisamment petit pour que $f^{-1}(D_\varepsilon^2(c))$ soit également transverse à ces boules. D'après le théorème de fibration d'Ehresmann, f induit une fibration localement triviale

$$f|_1 : f^{-1}(D_\varepsilon^2(c)) \cap B_R^{2n} \setminus B_\cup \rightarrow D_\varepsilon^2(c).$$

Cette fibration est triviale car $D_\varepsilon^2(c)$ est contractile. En conséquence $F_c^\circ \times D_\varepsilon^2(c)$ est

¹les notions d'ensemble de bifurcation, de valeurs irrégulières,... sont la généralisation en dimension quelconque des notions en dimension 2.

difféomorphe à $f^{-1}(D_\varepsilon^2(c)) \cap B_R^{2n} \setminus B_\cup$, d'où un plongement de F_c° dans $f^{-1}(c + \varepsilon) = F_{gen}$. Nous notons ℓ_c le morphisme induit par ce plongement en homologie.

1.2 Diagramme $jk\ell$

Soit j_c° le morphisme induit en homologie par l'inclusion de F_c° dans $T_c = f^{-1}(D_\varepsilon^2(c))$. S'il n'y a pas de singularités affines alors j_c° est le morphisme j_c du chapitre précédent. De même k_c désigne encore le morphisme induit par l'inclusion de F_{gen} dans T_c . Les inclusions sont toutes naturelles ce qui permet d'écrire le résultat suivant :

Lemme 7.1. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_q(F_c^\circ) & \xrightarrow{j_c^\circ} & H_q(T_c) \\ \ell_c \downarrow & \nearrow k_c & \\ H_q(F_{gen}) & & \end{array}$$

2 Un théorème des cycles invariants

2.1 Résultat

Théorème 7.2.

$$\text{Ker}(h_c - id) = \ell_c(H_q(F_c^\circ)).$$

En d'autres termes les cycles invariants pour la monodromie h_c sont l'image de la fibre irrégulière, sans ses points critiques, dans la fibre régulière.

Preuve. La démonstration utilise le diagramme commutatif suivant de W. Neumann et P. Norbury [NN'88] :

$$\begin{array}{ccc} H_q(F_{gen}, F_c^\circ) & \xrightarrow[\psi]{\sim} & V_q(c) \\ \varphi \uparrow & & i \downarrow \subset \\ H_q(F_{gen}) & \xrightarrow{id - h_c} & H_q(F_{gen}). \end{array}$$

$V_q(c) = \text{Ker } k_c$ sont les cycles évanescents qui seront étudiés au chapitre suivant. Le morphisme i est l'inclusion naturelle injective et ψ est un isomorphisme. Il en découle que $\text{Ker}(h_c - id)$ est égal à $\text{Ker } \varphi$. Écrivons la suite exacte longue de la paire (F_{gen}, F_c°)

$$\dots \longrightarrow H_q(F_c^\circ) \xrightarrow{\ell_c} H_q(F_{gen}) \xrightarrow{\varphi} H_q(F_{gen}, F_c^\circ) \longrightarrow \dots$$

Donc $\text{Im } \ell_c = \text{Ker } \varphi = \text{Ker}(h_c - id)$. □

Remarque. Ce résultat généralise le théorème des cycles invariants de F. Michel et C. Weber au cas des dimensions supérieures. Cependant nous nous restreignons ici aux singularités isolées ce qui n'est pas le cas dans [MW²⁰].

2.2 Dimension des cycles invariants par h_c

Nous allons calculer la dimension de $\text{Ker}(h_c - id)$ dans certains cas.

Pour $n \geq 3$ nous supposons que $\tilde{b}_q(F_{gen}) = \dim \tilde{H}_q(F_{gen}) = 0$ pour $q \neq n - 1$ (voir [ACD¹⁹]). Dans ce cas $H_n(F_{gen}, F_c^\circ)$ est nul. D'après la suite exacte de la paire (F_{gen}, F_c°) , $\ell_c : H_{n-1}(F_c^\circ) \longrightarrow H_{n-1}(F_{gen})$ est injectif. D'où pour le groupe d'homologie $H_{n-1}(F_{gen})$:

$$\dim \text{Ker}(h_c - id) = \dim \text{Im } \ell_c = \dim H_{n-1}(F_c^\circ),$$

le calcul de ce dernier membre est effectué dans [ACD¹⁹], on obtient $\dim \text{Ker}(h_c - id) = (-1)^n (1 - \chi(F_c)) + \tilde{b}_{n-2}(F_c^\circ)$.

Dans le cas où $n = 2$, notons $r(F_c)$ le nombre de composantes irréductibles de $F_c = f^{-1}(c)$. Nous notons également Sing_c les singularités affines situées sur la fibre F_c . Alors $H_2(F_{gen}, F_c^\circ)$ a pour dimension le nombre de singularités affines et c'est aussi la dimension de $\text{Ker } \ell_c$. De plus $\dim H_1(F_c^\circ) = r(F_c) - \chi(F_c) + \text{Card } \text{Sing}_c$.

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker}(h_c - id) &= \dim \text{Im } \ell_c \\ &= \dim H_1(F_c^\circ) - \dim \text{Ker } \ell_c \\ &= r(F_c) - \chi(F_c) + \text{Card } \text{Sing}_c - \text{Card } \text{Sing}_c \\ &= r(F_c) - \chi(F_c). \end{aligned}$$

Ce qui est également égal à $1 - \chi(F_c) + \tilde{b}_0(F_c^\circ)$.

Remarque. On retrouve, pour $n = 2$, que si la fibre F_c ($c \in B$) est irréductible alors $h_c \neq id$ (voir [MW²⁰]). En effet si $r(F_c) = 1$ et $h_c = id$ alors $\dim \text{Ker}(h_c - id) = \dim H_1(F_{gen}) = 1 - \chi(F_{gen})$ d'une part et d'autre part $\dim \text{Ker}(h_c - id) = 1 - \chi(F_c)$; en conséquence $\chi(F_c) = \chi(F_{gen})$ ce qui est absurde si $c \in B$ par la formule de Suzuki.

3 Cas de la dimension 2

Nous supposons le polynôme $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ primitif.

3.1 Description des cycles invariants

Notons $\Pi = \pi_1(\mathbb{C} \setminus B, *)$, ($* \notin B$), ce groupe fondamental agit sur l'homologie de la fibre générique. Nous désignons par $H_1(F_{gen})^\Pi$ les cycles laissés fixes par l'action

de Π . Soit ϕ la résolution totale de f . Si la fibre générique F_{gen} est $f^{-1}(\sigma)$, nous notons $\bar{F}_{gen} = \phi^{-1}(\sigma)$. F_{gen} est obtenu à partir de \bar{F}_{gen} en retirant un nombre fini de points. Plus précisément soit D une composante dicritique de D_{dic} de degré d , alors $\bar{F}_{gen} \cap D$ est exactement composé de d points; à ces d points on associe d composantes de bords que l'on regroupe dans $\partial_D F_{gen}$. Notons $\delta(f)$ le nombre de composantes dicritiques. La proposition suivante donne une description complète des cycles invariants par Π (voir également [BM²⁰]).

Proposition 7.3. Les cycles invariants sont

$$H_1(F_{gen})^\Pi = \left\{ [\partial_D F_{gen}] \mid D \text{ composante irréductible de } D_{dic} \right\}.$$

De plus

$$\dim H_1(F_{gen})^\Pi = \delta(f) - 1.$$

Preuve. Un théorème de Deligne (voir [De¹⁹], [ACD¹⁹]) prouve que $H_1(\bar{F}_{gen})^\Pi = \{0\}$, autrement dit les cycles invariants de $H_1(F_{gen})$ appartiennent aux composantes provenant du bord de F_{gen} . Chaque élément $[\partial_D F_{gen}]$ est laissé invariant par h_c pour $c \in B$, donc c'est un élément fixe pour l'action de Π . Soit h_∞ la monodromie correspondant à un lacet autour de tous les éléments de B ; h_∞ est la composition (dans un certain ordre) des monodromies locales h_c pour $c \in B$. Le graphe dual de $D_\infty = \phi^{-1}(\infty)$ est un arbre, donc l'intersection de D_∞ avec une composante dicritique D est réduite à un seul point. Localement en ce point d'intersection, l'équation de ϕ est

$$\phi(u, v) = \frac{1}{u^d}$$

(pour $(u = 0)$ une équation locale de D_∞ et $(v = 0)$ une équation de D). Donc la monodromie h_∞ permute cycliquement chacune des composantes de $\partial_D F_{gen}$.

Pour résumer, les éléments fixés par Π sont exactement les $[\partial_D F_{gen}]$. De plus, leur nombre est égal au nombre de composantes dicritiques : $\delta(f)$, mais comme $[\partial F_{gen}] = 0$ alors $\dim H_1(F_{gen})^\Pi = \delta(f) - 1$. \square

Nous allons maintenant donner une formule de la dimension des cycles invariants $H_1(F_{gen})^\Pi$ qui peut peut-être se généraliser en dimension supérieure. Notons \bar{h}_c la monodromie sur $H_1(\bar{F}_{gen})$ autour de c . D'après l'égalité de Kaliman ([Ka¹⁹]) :

$$\delta(f) - 1 = \sum_{c \in B} (r(F_c) - 1) - \dim H_1(\bar{F}_{gen}) + \sum_{c \in B} k_c$$

avec $k_c = \dim H_1(\bar{F}_{gen}) - \dim H_1(\bar{F}_c) = \text{codim Ker}(\bar{h}_c - id)$ (voir [ACD¹⁹]). De plus, le calcul de la dimension des cycles invariants par h_c vu plus haut, donne

$$\text{codim Ker}(h_c - id) = \chi(F_c) - \chi(F_{gen}) - (r(F_c) - 1).$$

En sommant ces égalités et en remarquant que

$$\sum_{c \in B} \chi(F_c) - \chi(F_{gen}) = \sum_{c \in B} \dim V_1(c) = \dim H_1(F_{gen}),$$

on obtient

$$\sum_{c \in B} \text{codim Ker}(h_c - id) = \dim H_1(F_{gen}) - \sum_{c \in B} (r(F_c) - 1).$$

L'égalité de Kaliman et la proposition précédente permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \dim H_1(F_{gen})^\Pi &= \dim H_1(F_{gen}) - \dim H_1(\bar{F}_{gen}) \\ &+ \sum_{c \in B} \text{codim Ker}(\bar{h}_c - id) - \sum_{c \in B} \text{codim Ker}(h_c - id). \end{aligned}$$

3.2 Application aux polynômes de type simple

Rappelons que f est de *type simple* si la fibre générique est rationnelle et si tous les degrés des dicritiques de la résolution de f sont égaux à 1 (voir la proposition 4.5, p. 40). Ces polynômes ont été étudiés par Miyanishi et Sugie [MS₈₃] (voir également [NN₈₀]).

Nous obtenons facilement la preuve de la proposition bien connue :

Proposition 7.4. $H_1(F_{gen})^\Pi = H_1(F_{gen})$ si et seulement si f est de type simple.

Preuve. Si f est de type simple alors les composantes dicritiques sont de degré 1. Donc les composantes de bords sont fixées par Π . Comme F_{gen} est sans genre, on a bien $H_1(F_{gen})^\Pi = H_1(F_{gen})$.

Réciproquement supposons $H_1(F_{gen})^\Pi = H_1(F_{gen})$. Soit D une composante dicritique de degré d . Comme h_∞ permute cycliquement les d composantes de $\partial_D F_{gen}$, alors nécessairement $d = 1$. Nous obtenons ainsi dans $H_1(F_{gen})^\Pi$ au moins $\delta(f) - 1$ composantes de bord. Mais c'est exactement la dimension de $H_1(F_{gen})^\Pi = H_1(F_{gen})$, donc F_{gen} est rationnelle. \square

3.3 Comment voir la fibre spéciale dans la fibre générique

Nous allons montrer, sur un exemple, comment il est possible d'obtenir la topologie de la fibre générique, des fibres spéciales et le plongement des fibres spéciales dans la fibre générique.

Considérons le polynôme de Briançon

$$f(x, y) = yp^3 + p^2s + a_1ps + a_0s$$

avec

$$s = xy + 1, \quad p = x(xy + 1) + 1, \quad a_1 = -\frac{5}{3}, \quad a_0 = -\frac{1}{3},$$

qui a les valeurs irrégulières à l'infini 0 et $c = \frac{16}{9}$; de plus toutes ses fibres sont lisses et irréductibles.

L'arbre $D_\infty \cup D_{dic}$ de résolution est dessiné sur la figure 22. Les composantes de multiplicité 0 sont les composantes dicritiques. La composante dicritique dessinée à droite est bonne (sans valeur irrégulière à l'infini), celle en haut à gauche est de degré 2 et il s'accroche deux diviseurs critiques D_0 et D_c .

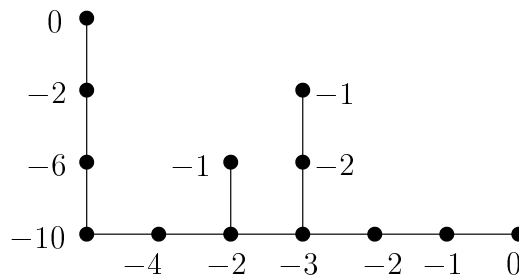


Fig. 22 – Arbre $D_\infty \cup D_{dic}$ du polynôme de Briançon

Fibre générique. La topologie de la fibre générique s'obtient en regardant le revêtement au-dessus des points lisses de D_∞ (voir les chapitres précédents). La fibre générique est topologiquement un tore 3-troué : deux trous pour le dicritique de degré 2 et un trou pour le dicritique de degré 1.

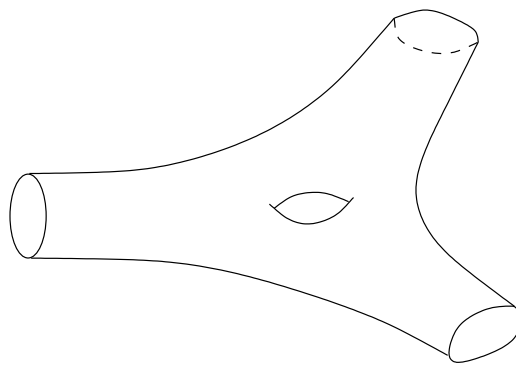


Fig. 23 – Fibre générique

Fibre spéciale F_0 . La fibre F_0 est lisse donc a la même topologie que F_0° , ici $F_0^\circ = f^{-1}(0) \cap B_R^4$. Nous nous occupons de $F_{gen} \setminus F_0^\circ$ (nous oublions abusivement le plongement de F_0° dans F_{gen}), ici c'est une union de composantes non compactes. Là où la fibre \bar{F}_0 coupe une composante dicritique, la composante correspondante dans $F_{gen} \setminus F_0^\circ$ est un (ou plusieurs) anneau. Il ne reste qu'à déterminer la composante correspondant à D_0 .

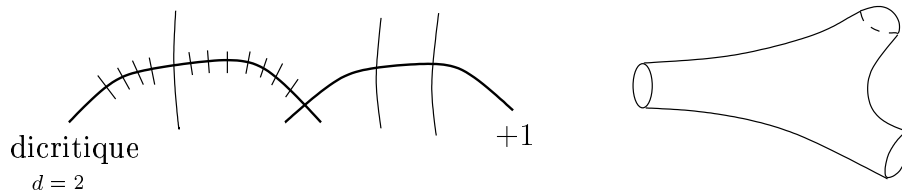


Fig. 24 – Diviseur D_0 et portion de fibre générique

Les points lisses de D_0 constituent une sphère 3-trouée. La portion de la fibre générique correspondante est également une sphère 3-trouée (figure 24, un trou pour le dicritique et deux trous pour l'intersection de la transformée stricte avec D_0 .) Nous avons décrit le complémentaire de F_0° dans F_0 . Nous obtenons la topologie de F_0 ainsi que son plongement dans F_{gen} : F_0 est une sphère 4-trouée (voir la figure 26).

Fibre spéciale F_c ($c = \frac{16}{9}$). La méthode est la même, une composante de $F_{gen} \setminus F_c^\circ$ est un anneau, l'autre composante correspond à la portion de fibre au dessus de D_c .

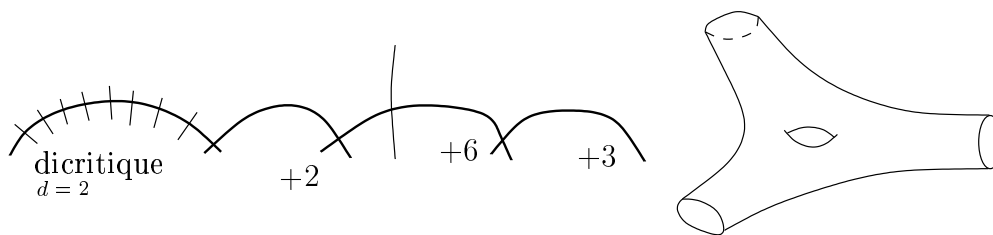


Fig. 25 – Diviseur D_c et portion de fibre générique

Plongement des fibres spéciales. L'étude précédente donne la topologie des fibres spéciales : F_0 est une sphère 4-trouée et F_c est un anneau. De plus le plongement des fibres F_0 et F_c dans la fibre générique est dessiné sur la figure 26.

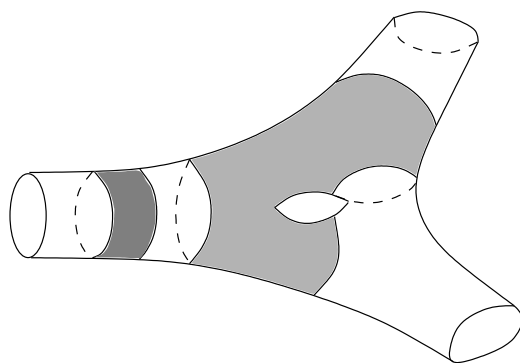


Fig. 26 – Plongement des fibres spéciales

Cycles évanescents

Nous avons étudié le morphisme induit en homologie par l'inclusion de la fibre spéciale dans le tube. Nous étudions maintenant le morphisme induit par l'inclusion de la fibre générique dans ce même tube. Par définition, le noyau de ce morphisme est composé des cycles évanescents. Nous supposons que $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ est à singularités isolées. Lorsque nous utiliserons une résolution de f (pour $n = 2$) nous éclaterons les singularités à l'infini de façon totale mais nous éclaterons aussi les singularités affines.

1 Fibre générique dans le tube

1.1 Morphisme de l'inclusion

Commençons par le cas où f est une application polynomiale à n variables. Notons $k_c : H_q(F_{gen}) \rightarrow H_q(T_c)$ le morphisme induit sur les groupes d'homologie par l'inclusion $F_{gen} \hookrightarrow T_c$. Par définition les *cycles évanescents* pour la valeur c sont $V_q(c) = \text{Ker } k_c$.

Proposition 8.1 (Broughton). L'application k_c est surjective. Dans le cas $n = 2$, $k_c : H_1(F_{gen}) \rightarrow H_1(T_c)$ n'est pas injective si $c \in B$.

Preuve. La suite exacte (\star , p. 56) du chapitre 6 s'écrit ici :

$$0 \longrightarrow H_q(F_{gen}) \xrightarrow{k_c \oplus k'_c} H_q(T_c) \oplus H_q(f^{-1}(D')) \longrightarrow 0$$

L'isomorphisme $k_c \oplus k'_c$ implique en particulier que k_c est surjective.

Pour $n = 2$, le nombre de cycles évanescents dans $V_1(c)$ est : $\chi(T_c) - \chi(F_{gen}) = \chi(F_c) - \chi(F_{gen})$ qui est strictement positif par la formule de Suzuki. \square

1.2 Décomposition de $H_q(F_{gen})$

La décomposition suivante est due à Broughton :

Lemme 8.2.

$$H_q(F_{gen}) = \bigoplus_{c \in B} V_q(c).$$

Preuve. Rappelons que $T_c = f^{-1}(D_\varepsilon^2(c))$. Choisissons $s \notin \bigcup_{c \in B} D_\varepsilon^2(c)$ et des chemins γ_c ($c \in B$) de \mathbb{C} reliant s à $D_\varepsilon^2(c)$ tels que les γ_c soient disjoints sauf en s . (Voir la figure 27.)

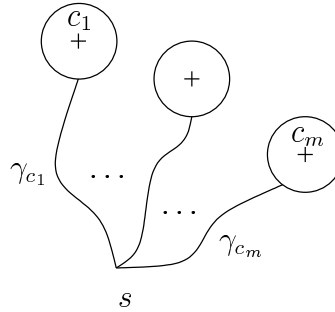


Fig. 27 – Chemins et disques de $C \cup T$

Notons

$$T = \bigcup_{c \in B} T_c, \quad C = \bigcup_{c \in B} f^{-1}(\gamma_c).$$

Alors $f^{-1}(s)$ est une fibre générique, notée F_{gen} , $T \cap C$ est aussi une union disjointe de fibres génériques : $T \cap C = \bigsqcup_{c \in B} F_{gen}$. D'autre part $C \cup T$ est un rétracte par déformation de \mathbb{C}^n car $\bigcup_{c \in B} (D_\varepsilon^2(c) \cup \gamma_c)$ est un rétracte par déformation de \mathbb{C} . La suite exacte de Mayer-Vietoris pour la décomposition $C \cup T$ s'écrit donc :

$$0 \longrightarrow H_q(C \cap T) \longrightarrow H_q(C) \oplus H_q(T) \longrightarrow 0.$$

Ceci induit l'isomorphisme

$$\bigoplus_{c \in B} H_q(F_{gen}) \xrightarrow{\cong} H_q(F_{gen}) \oplus \bigoplus_{c \in B} H_q(T_c).$$

Notons $\alpha \oplus \beta$ cet isomorphisme alors $\text{Ker } \beta$ est exactement $\bigoplus_{c \in B} V_q(c)$.

Enfin de façon générale si $\alpha \oplus \beta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$ est un isomorphisme alors $\text{Ker } \beta = \text{Ker } 0 \oplus \beta = (\alpha \oplus \beta)^{-1}(\mathcal{B} \oplus 0) \cong \mathcal{B} \oplus 0 \cong \mathcal{B}$.

Dans notre situation $\text{Ker } \beta = \bigoplus_{c \in B} V_q(c) \cong H_q(F_{gen})$. De plus l'isomorphisme est induit par les inclusions de $V_q(c)$ dans $H_q(F_{gen})$ et nous écrivons donc

$$H_q(F_{gen}) = \bigoplus_{c \in B} V_q(c).$$

□

1.3 Cycles évanescents et monodromie

La monodromie correspondant à la fibre générique F_{gen} et au petit cercle $S^1_\delta(c)$ agit sur le groupe d'homologie $H_q(F_{gen})$. Cette action est notée h_c .

Le lemme suivant, bien qu'élémentaire, est fondamental.

Lemme 8.3. Pour $\sigma \in H_q(F_{gen})$ alors

$$h_c(\sigma) - \sigma \in V_q(c).$$

Preuve. En effet, le cycle $h_c(\sigma) - \sigma$ correspond au cycle de bord du « tube » \mathcal{T} défini par l'orbite de l'action de la monodromie géométrique h'_t ($t \in [0, 1]$, $h'_0 = id$ et $[h'_1] = h_c$) d'un représentant s de $\sigma : \mathcal{T} = \{h'_t(s) \mid t \in [0, 1]\}$. □

Remarque. Lorsque $\sigma \in V_q(c)$ la relation du lemme précédent $h_c(\sigma) - \sigma \in V_q(c)$ implique $h_c(\sigma)$ appartient à $V_q(c)$. Autrement dit $V_q(c)$ est stable par h_c .

Lemme 8.4. Le diagramme de suites exactes suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & V_q(c) & \longrightarrow & H_q(F_{gen}) & \xrightarrow{k_c} & H_q(T_c) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow h_c & & \downarrow h_c & & \downarrow id & & \\ 0 & \longrightarrow & V_q(c) & \longrightarrow & H_q(F_{gen}) & \xrightarrow{k_c} & H_q(T_c) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Preuve. Les suites sont exactes d'après la surjectivité de k_c et l'inclusion naturelle de $V_q(c)$ dans $H_q(F_{gen})$.

Les diagrammes suivants

$$\begin{array}{ccc} V_q(c) & \longrightarrow & H_q(F_{gen}) \\ \downarrow h_c & & \downarrow h_c \\ V_q(c) & \longrightarrow & H_q(F_{gen}) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} V_q(c) \oplus \bigoplus V_q(c') & \xrightarrow{k_c} & H_q(T_c) \\ \downarrow h_c & & \downarrow id \\ V_q(c) \oplus \bigoplus V_q(c') & \xrightarrow{k_c} & H_q(T_c). \end{array}$$

$\sigma \in F_\lambda$:

$$\begin{aligned}
 0 &= (h_c - \lambda \text{id})^p(\sigma) \\
 &= \sum_{j=0}^p C_p^j (-\lambda)^{p-j} h_c^j(\sigma) \\
 &= \sum_{j=0}^p C_p^j (-\lambda)^{p-j} (h_c^j(\sigma) - \sigma) + \sum_{j=0}^p C_p^j (-\lambda)^{p-j} \sigma \\
 &= \sum_{j=0}^p C_p^j (-\lambda)^{p-j} (h_c^j(\sigma) - \sigma) + (1 - \lambda)^p \sigma.
 \end{aligned}$$

Chaque $h_c^j(\sigma) - \sigma$ est un élément de $V_q(c)$ alors une somme de tels éléments l'est aussi, et donc $(1 - \lambda)^p \sigma \in V_q(c)$. Mais comme $\lambda \neq 1$ alors $\sigma \in V_q(c)$. \square

3 Cycles évanescents pour la valeur propre $\lambda = 1$

Il nous reste à étudier les cycles évanescents associés à la valeur propre 1.

Rappelons que les cycles évanescents pour la valeur c sont les cycles qui disparaissent lorsque l'on fait « tendre » la fibre générique vers la fibre F_c . Ainsi les cycles qui ne vont pas être évanescents sont les cycles qui existent déjà dans F_c . Tous ces cycles sont associés à la valeur propre 1.

3.1 Cas des blocs de Jordan de taille > 1

Soit (τ_1, \dots, τ_p) une famille de $H_q(F_{gen})$ telle que l'expression de h_c dans cette famille soit

$$\begin{pmatrix}
 1 & 1 & & & \\
 & 1 & 1 & & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & & 1 & \ddots \\
 & & & & & \ddots & 1 \\
 & & & & & & & 1
 \end{pmatrix}.$$

Lemme 8.6. Les cycles $\tau_1, \dots, \tau_{p-1}$ sont évanescents.

Preuve. La preuve est une simple conséquence du lemme 8.3, car pour $i = 1, \dots, p-1$ nous avons $h_c(\tau_{i+1}) - \tau_{i+1} = \tau_i$, donc τ_i est un cycle évanescent. \square

Il reste à étudier le cas de τ_p et en particulier le cas des blocs de Jordan de taille 1×1 de la forme (1).

3.2 Blocs de Jordan dans le cas $n = 2$

Dans le cas des polynômes à $n = 2$ variables, la taille des blocs de Jordan est inférieure ou égale à 2. Notons σ, τ deux cycles de $H_1(F_{gen})$ tels que $h_c(\sigma) = \sigma$ et $h_c(\tau) = \sigma + \tau$. La matrice de h_c pour la famille (σ, τ) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le cycle σ est évanescent d'après le paragraphe précédent. D'après l'étude des blocs de Jordan de [MW₂₀] le cycle τ correspond à un grand cycle (voir plus loin le paragraphe 4 pour la définition) associé à la valeur propre 1. Ce cycle τ n'est pas évanescent car les grands cycles pour la valeur propre 1 sont le plongement de $H_1(\bar{G}_c)$ dans la fibre générique, et donc ne sont pas évanescents.

3.3 Cycles invariants et évanescents

Cas général. Soit $K_q(c) = \text{Ker}(h_c - id) \cap V_q(c)$. Ce sont les cycles invariants parmi les cycles évanescents.

Remarque. Attention! Il n'est pas vrai que $K_q(c) \oplus \bigoplus_{c' \neq c} V_q(c')$ soient les cycles invariants $\text{Ker}(h_c - id)$ comme c'est le cas en cohomologie.

Proposition 8.7.

$$K_q(c) = \ell_c(\text{Ker } j_c^\circ)$$

Preuve. Nous omettons l'indice c . Soit $\beta \in \ell(\text{Ker } j^\circ)$, il existe $\alpha \in \text{Ker } j^\circ$ tel que $\ell(\alpha) = \beta$. Comme $j^\circ(\alpha) = 0$ d'après le diagramme $jk\ell$ (voir 7.1), $k \circ \ell(\alpha) = 0$ donc $k(\beta) = 0$ et donc $\beta \in V_q(c)$. De plus $\beta \in \text{Im } \ell$ car $\ell(\text{Ker } j^\circ) \subset \text{Im } \ell = \text{Ker}(h_c - id)$.

Réciproquement, soit $\beta \in K_q(c)$, $K_q(c) = V_q(c) \cap \text{Im } \ell$ d'après le théorème des cycles invariants. $\beta \in V_q(c)$ donc $k(\beta) = 0$; $\beta \in \text{Im } \ell$ donc il existe $\alpha \in H_q(F_c^\circ)$ tel que $\ell(\alpha) = \beta$. Alors $k \circ \ell(\alpha) = k(\beta) = 0$. Or le diagramme donne $k \circ \ell = j^\circ$ donc $j^\circ(\alpha) = 0$ et $\beta = \ell(\alpha) \in \ell(\text{Ker } j^\circ)$. \square

Minoration de la dimension de $K_q(c)$. Nous allons minorer la dimension de $K_q(c)$ dans les cas du paragraphe 2.2 du chapitre 7. Notons h_\perp la monodromie h_c restreinte à $V_{n-1}(c)$. Alors $K_{n-1}(c) = \text{Ker } h_\perp$. Nous avons déjà vu que $\text{Im}(h_c - id)$ est inclus

dans $V_{n-1}(c)$. De plus $\dim V_{n-1}(c) = (-1)^n(\chi(F_c) - \chi(F_{gen}))$. Donc

$$\begin{aligned} \dim K_{n-1}(c) &= \dim (V_{n-1}(c) / \text{Im}(h_{\mid} - id)) \\ &\geq \dim (V_{n-1}(c) / \text{Im}(h_c - id)) \\ &\geq \dim V_{n-1}(c) + \dim \text{Ker}(h_c - id) - \dim H_{n-1}(F_{gen}) \\ &\geq (-1)^n(\chi(F_c) - \chi(F_{gen})) + (-1)^n(1 - \chi(F_c)) \\ &\quad + \tilde{b}_{n-2}(F_c^\circ) - (-1)^n(1 - \chi(F_{gen})) \\ &\geq \tilde{b}_{n-2}(F_c^\circ). \end{aligned}$$

Pour $n = 2$ on obtient :

$$\dim K_1(c) \geq r(F_c) - 1.$$

D'après le résultat ci-dessus et l'étude du paragraphe précédent nous avons les deux minoration suivantes $\dim K_1(c) \geq r(F_c) - 1$ et $\dim K_1(c) \geq \dim H_1(\bar{G}_c)$. Nous allons voir qu'en fait la dimension de $K_1(c)$ est la somme de ces deux minoration.

Dimension de $K_1(c)$ ($n = 2$).

Proposition 8.8.

$$\dim K_1(c) = r(F_c) - 1 + \dim H_1(\bar{G}_c).$$

Preuve. La démonstration va découler des remarques suivantes :

1. $K_1(c) = \ell(\text{Ker } j^\circ)$, par la proposition 8.7.
2. $j^\circ = j \circ i$ où $i : H_1(F_c^\circ) \rightarrow H_1(F_c)$ est induit par l'inclusion. Ce fait découle du diagramme suivant, qui est commutatif car tous les morphismes proviennent d'inclusions.

$$\begin{array}{ccc} H_1(F_c) & & \\ \uparrow i & \searrow j & \\ H_1(F_c^\circ) & \xrightarrow{j^\circ} & H_1(T_c). \end{array}$$

3. $\dim \text{Ker } j^\circ = \dim \text{Ker } i + \dim \text{Ker } j \cap \text{Im } i$, c'est une formule générale sur le noyau de composée de morphismes.
4. $\text{Ker } j \cap \text{Im } i = \text{Ker } j$. En effet les cycles de $H_1(F_c)$ qui n'appartiennent pas à $\text{Im } i$ sont les cycles correspondant à $H_1(G_c)$ (et ils correspondent à des grands cycles dans $H_1(F_{gen})$), donc ces cycles ne sont pas dans $\text{Ker } j$ (voir le paragraphe 3).
5. $\dim \text{Ker } i = \sum_{z \in \text{Sing}_c} r(F_{c,z})$, où Sing_c désigne les points singuliers (affines) de la courbe F_c ; $F_{c,z}$ désigne le germe de la courbe F_c au point z .

6. $\dim \text{Ker } j = \dim \text{Ker } j_\infty = \sum_{P \in \text{Dic}_c} (n(F_P) - 1) = n(F_c) + \dim H_1(\bar{G}_c) - \dim H_1(G_c)$. Ceci a été prouvé au chapitre 6.
7. $r(F_c) + \dim H_1(G_c) = n(F_c) + \sum_{z \in \text{Sing}_c} (r(F_{c,z}) - 1)$. C'est une formule générale sur le graphe G_c dont le nombre de sommets est $r(F_c)$, le nombre de composantes connexes $n(F_c)$, le nombre de boucles $\dim H_1(G_c)$ et le nombre d'arêtes qui partent d'un sommet représentant la composante irréductible F_{irr} de F_c : $\sum (r(F_{irr,z}) - 1)$.
8. $\dim K_1(c) = \dim \text{Ker } j^\circ - \text{Card Sing}_c$ car $\text{Ker } i$ est inclus dans $\text{Ker } \ell$ donc $\dim K_1(c) = \dim \text{Ker } j^\circ - \dim \text{Ker } \ell$ et la dimension de $\text{Ker } \ell$ est Card Sing_c (voir le chapitre 7, paragraphe 2.2).

Le calcul est maintenant aisé :

$$\dim K_1(c) = \dim \ell(\text{Ker } j^\circ) \tag{1}$$

$$= \dim \text{Ker } j^\circ - \dim \text{Ker } \ell \tag{8}$$

$$= \dim \text{Ker } j \circ i - \text{Card Sing}_c \tag{2) et (8)}$$

$$= \dim \text{Ker } i + \dim \text{Ker } j \cap \text{Im } i - \text{Card Sing}_c \tag{3}$$

$$= \dim \text{Ker } i + \dim \text{Ker } j - \text{Card Sing}_c \tag{4}$$

$$= \sum_{z \in \text{Sing}_c} (r(F_{c,z}) - 1) + n(F_c) + \dim H_1(\bar{G}_c) - \dim(G_c) \tag{5) et (6)}$$

$$= r(F_c) - 1 + \dim H_1(\bar{G}_c). \tag{7}$$

□

Remarque. Nous pouvons aussi exprimer ce résultat sous la forme

$$\dim K_1(c) = \sum_{z \in \text{Sing}_c} (r(F_{c,z}) - 1) + \sum_{P \in \text{Dic}_c} (n(F_P) - 1).$$

4 Cycles évanescents et filtration de $H_1(F_{gen})$

4.1 Filtration

Soit ϕ le morphisme associé à la résolution totale de f , nous éclatons aussi les singularités affines. Le diviseur $\phi^{-1}(c)$ est noté $\sum_i m_i D_i$ où m_i désigne la multiplicité de la composante D_i . À chaque D_i correspond une portion de la fibre générique : nous notons cette portion F_i (comme dans le chapitre 2).

Nous allons filtrer l'homologie de la fibre générique ([MW²³]) :

$$W_{-1} \subset W_0 \subset W_1 \subset W_2 = H_1(F_{gen}).$$

- W_{-1} : ce sont les cycles de bord, c'est-à-dire que si \bar{F}_{gen} est la fibre générique compactifiée et $\iota_* : H_1(F_{gen}) \longrightarrow H_1(\bar{F}_{gen})$ est induit par l'inclusion de F_{gen} dans \bar{F}_{gen} , alors $W_{-1} = \text{Ker } \iota_*$.
- W_0 : ce sont les cycles de recollement, c'est-à-dire le groupe d'homologie sur les composantes de $F_i \cap F_j$ ($i \neq j$).
- W_1 : la somme directe des $H_1(F_i)$.
- $W_2 = H_1(F_{gen})$.

Les *grands cycles* de $H_1(F_{gen})$ sont les cycles ayant une classe d'équivalence non nulle dans W_2/W_1 . Remarquons que les modules W_0 et W_1 dépendent de la valeur c .

4.2 Polynômes caractéristiques

Dans [MW³⁰], sont données les formules des polynômes caractéristiques de la monodromie h_c sur les modules W_{-1} , W_0/W_{-1} , W_1/W_0 et W_2/W_1 . Les formules sont les suivantes :

- Sur W_{-1} : $\Delta_{-1}(t) = (t-1)^{-1} \prod_{P \in \text{Dic}_c} (t^{d_P} - 1)$ où d_P est le degré de ramification de ϕ en P .
- Les modules W_0/W_{-1} et W_2/W_1 sont isomorphes et ont même polynôme caractéristique :

$$\Delta_2(t) = \Delta_0(t) = (t-1) \frac{\prod_{D_i \cap D_j \neq \emptyset} t^{m_{ij}} - 1}{\prod_{D_i} t^{r_i} - 1}$$

où m_{ij} désigne le pgcd de m_i et de m_j et r_i est le nombre de composantes connexes de F_i (c'est-à-dire le pgcd de m_i et des m_j pour tous les j tels que D_j intersecte D_i).

- Pour le module W_1/W_0 : le polynôme caractéristique est le produit des polynômes caractéristiques associés à chaque F_i :

$$\Delta_1^i(t) = \frac{(t^{m_i} - 1)^{v_i-2} (t^{r_i} - 1)^2}{\prod_{D_j \cap D_i \neq \emptyset} (t^{m_{ij}} - 1)}$$

avec v_i le nombre de composantes D_j coupant D_i .

4.3 Cycles évanescents

Nous sommes maintenant en mesure de donner une autre description des cycles évanescents qui découle de l'étude de ce chapitre.

Dans chacun des modules W_{-1} , W_0/W_{-1} , W_1/W_0 et W_2/W_1 les cycles associés aux valeurs propres différentes de 1 sont évanescents.

Les cycles évanescents associés à la valeur propre 1 se répartissent comme suit :

- W_{-1} : $r(F_c) - 1$ cycles,
- W_0 : $\dim H_1(\bar{G}_c)$ cycles supplémentaires,
- W_1 : aucun autre cycle,
- W_2 : aucun autre cycle.

En effet nous avons vu que les grands cycles associés aux blocs de Jordan $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas évanescents, donc il n'y a pas de cycle évanescents dans W_2 qui ne soit déjà dans W_1 . De plus il y a $\dim H_1(\bar{G}_c)$ blocs de Jordan pour la valeur propre 1 ce qui donne $\dim H_1(\bar{G}_c)$ cycles évanescents dans W_0 .

Les autres cycles évanescents pour la valeur propre 1 sont des cycles invariants, c'est-à-dire des éléments de $K_1(c)$. Nous avons $W_1 \cap K_1(c) = W_0 \cap K_1(c)$, cela signifie qu'il n'y a pas de nouveau cycle dans W_1 par rapport à W_0 (pour la valeur propre 1). En effet les cycles invariants de W_1 (qui ne sont pas dans W_0) correspondent au genre de la fibre F_c° car $\text{Ker}(h_c - id) = \ell_c(H_1(F_c^\circ))$. Ce sont des cycles qui apparaissent déjà dans F_c et ce ne sont donc pas des cycles évanescents pour la valeur c .

Enfin si nous avons deux cycles différents σ et σ' de $W_0 \cap K_1(c)$ mais de même classe dans W_0/W_{-1} , alors $\sigma' = \sigma + \pi$, $\pi \in W_{-1}$; cela implique que $\pi = \sigma' - \sigma$ est un cycle de $K_1(c)$. Nous pouvons donc choisir les $r(F_c) - 1$ cycles restants de $K_1(c)$ dans W_{-1} .

Les formules donnant les polynômes caractéristiques et l'étude des cycles évanescents permettent de décrire la sous-matrice $h_{i,i}$ de la matrice h_c pour $c = c_i$ dans une base de $V_1(c)$:

$$h_{i,i} = \begin{pmatrix} W_{-1} & W_{-1} & W_0 & W_0 & W_1 & W_2 \\ I_{-1} & & & & & \\ & M_{-1} & & & & \\ & & I_0 & & & \\ & & & M_0 & & I_2 \\ & & & & M_1 & \\ & & & & & M_2 \end{pmatrix}$$

avec I_{-1} , I_0 et I_2 sont des matrices identités de taille $r(F_c) - 1$ pour I_{-1} et $\dim H_1(\bar{G}_c)$ pour I_0 . Les matrices M_i ($i = -1, \dots, 2$) sont les matrices diagonales des valeurs propres différentes de 1. De plus les vecteurs de la base choisis pour les espaces W_0 et W_2 sont en correspondance, c'est-à-dire si les vecteurs (pour des valeurs propres différentes de 1) pour W_0 sont $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ et ceux pour W_2 sont τ_1, \dots, τ_k alors $h_c(\tau_i) = \lambda_i \tau_i + \sigma_i$ (avec $\lambda_i \neq 1$).

5 Non semi-simplicité

Pour un polynôme primitif $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, nous notons Π la représentation induite par l'action de $\pi_1(\mathbb{C} \setminus B, *)$ sur le groupe d'homologie $H_1(F_{gen})$. Nous notons Π' la représentation induite sur le groupe de cohomologie $H^1(F_{gen})$. Le problème est de savoir si les représentations Π et Π' sont semi-simples. Pour la cohomologie, il a été montré dans [BM²⁰] que Π' n'est pas semi-simple (voir le paragraphe 5.2). Nous donnons ici une réponse également négative pour l'homologie.

Nous avons deux sous-représentations, la première induite par le groupe d'homologie (*resp.* cohomologie) $H_1(\bar{F}_{gen})$ (*resp.* $H^1(\bar{F}_{gen})$) sur la fibre générique compactifiée. La deuxième induite par les cycles (*resp.* cocycles) de bord $H_1(\partial F_{gen})$ (*resp.* $H^1(\partial F_{gen})$). Nous avons les suites exactes suivantes, compatibles avec la représentation :

$$0 \longrightarrow H_1(\partial F_{gen}) \longrightarrow H_1(F_{gen}) \longrightarrow H_1(\bar{F}_{gen}) \longrightarrow 0,$$

et

$$0 \longrightarrow H^1(\bar{F}_{gen}) \longrightarrow H^1(F_{gen}) \longrightarrow H^1(\partial F_{gen}) \longrightarrow 0.$$

5.1 L'exemple

Cet exemple est dû à Deligne d'après [Fr⁹⁹]. Soit

$$f(x, y) = xy^2 + x^2 + y.$$

Alors, pour ce polynôme : $B_\infty = \emptyset$, $B_{\text{aff}} = \{c_1 = \frac{3}{4}, c_2 = -\frac{3}{8} + \frac{3}{8}i\sqrt{3}, c_3 = -\frac{3}{8} - \frac{3}{8}i\sqrt{3}\}$, donc $B = \{c_1, c_2, c_3\}$.

La fibre générique est un tore 2-troué. En fait pour la résolution de f nous obtenons $\delta(f) = 2$ composantes dicritiques de degré 1. Nous avons donc, en homologie, un seul cycle de bord ; donc l'action de Π sur $H_1(\partial F_{gen})$ est l'identité. Il en est de même pour la cohomologie.

Les fibres spéciales F_c , $c \in B$ sont irréductibles et le nombre de Milnor $\mu(c)$ vaut 1. En conséquence F_c n'a qu'une seule singularité : c'est une singularité quadratique ordinaire qui provient de l'auto-intersection de F_c . Nous obtenons donc un cycle pour $\bar{G}_c = G_c$ et donc un bloc de Jordan $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour la monodromie h_c . Dans une base $(\sigma_i, \tau_i, \omega_i)$ (qui dépend de $c_i \in B$) la matrice de h_{c_i} est :

$$h_{c_i} = \begin{pmatrix} \sigma_i & \tau_i & \omega_i \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avec τ_i un grand cycle pour la valeur c_i .

5.2 Non semi-simplicité en cohomologie

Montrons que Π' n'est pas semi-simple. Cette démonstration est due à [BM₉₉], voir aussi [Fr₉₉].

Par l'absurde supposons que Π' est semi-simple. Alors il existe un supplémentaire S de $H^1(\bar{F}_{gen})$ (compatible avec la représentation) :

$$H^1(F_{gen}) = H^1(\bar{F}_{gen}) \oplus S.$$

Sur les cocycles invariants, nous en déduisons la relation suivante : $\dim H^1(F_{gen})^{\Pi'} = \dim H^1(\bar{F}_{gen})^{\Pi'} + \dim S^{\Pi'}$. Or $\dim H^1(F_{gen})^{\Pi'} = \sum_{c \in B} (r(F_c) - 1)$ d'après [ACD₉₃] et $\dim H^1(\bar{F}_{gen})^{\Pi'} = 0$ d'après la preuve de la proposition 7.3. Enfin S est isomorphe à $H^1(F_{gen})/H^1(\bar{F}_{gen})$ et donc à $H^1(\partial F_{gen})$ (le tout compatible avec la représentation). Nous avons donc $\dim S^{\Pi'} = \dim H^1(\partial F_{gen})^{\Pi'}$. Or toujours d'après la preuve de la proposition 7.3 cette dimension vaut $\delta(f) - 1$.

Pour résumer : $\sum_{c \in B} (r(F_c) - 1) = \delta(f) - 1$ (c'est le cas d'égalité dans l'inégalité de Kaliman). Or pour notre polynôme, toutes les fibres sont irréductibles donc $\sum_{c \in B} (r(F_c) - 1) = 0$. Mais nous avons 2 dicritiques donc $\delta(f) - 1 = 1$. Ce qui est absurde.

5.3 Non semi-simplicité en homologie

Le même raisonnement en homologie ne conduit nulle part car l'argument sur les dimensions donne $\dim H_1(F_{gen})^{\Pi'} = \dim H_1(\bar{F}_{gen})^{\Pi'} + \dim H_1(\partial F_{gen})^{\Pi'}$. Soit $\delta(f) - 1 = \delta(f) - 1$ d'après le résultat de la proposition 7.3. Nous utilisons donc une autre méthode.

Par l'absurde si Π est semi-simple alors $H_1(\partial F_{gen})$ admet un supplémentaire S dans $H_1(F_{gen})$ (compatible avec la représentation) :

$$H_1(F_{gen}) = S \oplus H_1(\partial F_{gen}).$$

Rappelons que l'action de Π sur le groupe $H_1(\partial F_{gen})$ de notre polynôme f est triviale. Si γ représente le cycle de bord, il existe une base (fixe) (α, β, γ) de $H_1(F_{gen})$ telle que les matrices de h_{c_i} pour $i = 1, 2, 3$, soient de la forme :

$$h_{c_i} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans cette base, écrivons le grand cycle τ_i pour la valeur c_i :

$$\tau_i = a_i\alpha + b_i\beta + c_i\gamma.$$

Comme $h_{c_i}(\gamma) = \gamma$ alors

$$\sigma_i = h_{c_i}(\tau_i) - \tau_i = a'_i\alpha + b'_i\beta,$$

c'est-à-dire que $\sigma_i \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Mais d'après le lemme 8.3, σ_i est un cycle évanescents pour la valeur c_i . D'après la décomposition de Broughton (lemme 8.2), les cycles $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ forment une famille libre (et ici une base) de $H_1(F_{gen})$. Nous obtenons donc que l'espace de dimension 3 $\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rangle$ est inclus dans $\langle \alpha, \beta \rangle$. D'où la contradiction.

Polynômes ayant une seule valeur irrégulière

Nous donnons la classification à équivalence topologique près des polynômes réduits $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ qui n'ont qu'une seule valeur irrégulière.

1 Introduction

Le but de ce chapitre est de donner la classification des polynômes réduits qui n'ont qu'une seule valeur irrégulière c'est-à-dire pour clarifier les choses, $B = \{0\}$. Cette classification est obtenue à homéomorphismes près; plus précisément deux polynômes f et g sont *topologiquement équivalents* ($f \approx g$) s'il existe des homéomorphismes Φ et Ψ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{C}^2 \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{C}. \end{array}$$

Théorème. Soit $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ un polynôme réduit. Nous notons p et q des entiers premiers entre eux, $\varepsilon, \varepsilon' \in \{0, 1\}$, $\sigma = \sigma(x, y) = x^s y + 1$, ($s > 0$). Soit g le polynôme défini par $g(x) = \prod_{i=1}^n (x - i)^{m_i}$, avec $1 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n$ et $n \geq 1$; et soit g_{red} le polynôme réduit associé à $g : g_{red}(x) = \prod_{i=1}^n (x - i)$.

- Si $B_{aff} = B_{\infty} = \emptyset$ alors $f \approx x$,
- si $B_{aff} = \{0\}$ et $B_{\infty} = \emptyset$ alors
 - $f \approx y \cdot g_{red}(x)$,

- ou $f \approx x \prod_{i=1}^n (x^p - iy)$ (si $p = 1$ alors $n \geq 2$),
- ou $f \approx x^\varepsilon y^{\varepsilon'} \prod_{i=1}^n (x^p - iy^q)$, ($1 < p < q$),
- si $B_{\text{aff}} = \emptyset$ et $B_\infty = \{0\}$ alors
 - $f \approx x \prod_{i=1}^n (x^p y^q - i)$
 - ou $f \approx x \sigma \prod_{i=1}^n (x^p \sigma^q - i)$ ($p > 1$ ou $q > 1$),
 - ou $f \approx x \sigma^\varepsilon \prod_{i=1}^n (x^p - i \sigma^q)$ (si $\varepsilon = 0$ alors $q > 1$),
 - ou $f \approx g_{\text{red}}(x)(g(x)y + 1)$ ($n > 1$),
- si $B_{\text{aff}} = \{0\}$ et $B_\infty = \{0\}$ alors
 - $f \approx xy \prod_{i=1}^n (x^p y^q - i)$ ($1 \leq p < q$),
 - ou $f \approx g_{\text{red}}(x)k(x)(g(x)y + 1)$ ($k(x) = \prod_{i=1}^{n'} (x + i)$, $n' \geq 1$).

De plus deux polynômes distincts de cette classification ne sont pas topologiquement équivalents.

Nous utiliserons également une notion d'équivalence plus forte. Deux polynômes f et g sont *algébriquement équivalents* ($f \sim g$) s'il existe un automorphisme algébrique Φ de \mathbb{C}^2 et Ψ un automorphisme de \mathbb{C} ayant pour équation $\Psi(z) = az + b$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{C}^2 \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{C}. \end{array}$$

L'étude des polynômes ayant une unique valeur irrégulière est réduite à quelques cas, à équivalence algébrique près. Le cas $B = \emptyset$ est le théorème d'Abhyankar-Moh ([AM75], voir le paragraphe 2). Un théorème de M. Zaïdenberg and V. Lin [ZL83] correspond au cas $B_{\text{aff}} = \{0\}$ et $B_\infty = \emptyset$ pour les polynômes irréductibles. Nous généralisons ce résultat au cas réductible en utilisant des méthodes tirées de la preuve du théorème de Zaïdenberg-Lin par W. Neumann et L. Rudolph [NR87] (paragraphe 3). Les cas restants ($B_\infty = \{0\}$) sont étudiés dans les paragraphes 4 et 5. Les arguments sont essentiellement topologiques : nous trouvons un disque lisse dans la fibre $f^{-1}(0)$ et nous utilisons des revêtements ramifiés pour donner des équations représentant les classes des polynômes à équivalence algébrique près. Ceci nous permet de donner la liste obtenue par M. Zaïdenberg qui utilise une \mathbb{C}^* -action [Za83].

La dernière partie du chapitre (paragraphe 6) consiste à déduire des résultats précédents la classification topologique. La résolution des singularités détermine les polynômes n'ayant qu'une seule valeur irrégulière, à équivalence topologique près. Nous obtenons ainsi une classification qui n'est pas redondante ; en particulier nous trouvons des polynômes qui sont topologiquement équivalents mais pas algébriquement équivalents.

2 Préliminaires

Le théorème de S. Abhyankar et T. Moh [AM₇₅¹⁹], [Su₇₄¹⁹] s'applique lorsqu'il n'y a aucune valeur irrégulière :

Théorème 9.1. Si $B = \emptyset$ alors $f \sim x$.

Nous notons toujours $F_0 = f^{-1}(0)$ et nous rappelons qu'un polynôme est primitif si sa fibre générique est connexe. Le lien entre la caractéristique d'Euler de la fibre au-dessus de 0 et l'inclusion $B \subset \{0\}$ (c'est-à-dire $B = \emptyset$ ou $B = \{0\}$) est décrit dans le lemme suivant :

Lemme 9.2. Si $B \subset \{0\}$ alors $\chi(F_0) = +1$. De plus, si le polynôme f est primitif et $\chi(F_0) = +1$ alors $B \subset \{0\}$.

Preuve. La décomposition $\mathbb{C} = \mathbb{C} \setminus \{0\} \cup \{0\}$ fournit une partition $\mathbb{C}^2 = f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup f^{-1}(0)$. Par additivité de la caractéristique d'Euler, [Fu₉₃¹⁹, p. 95]

$$1 = \chi(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})) + \chi(f^{-1}(0)).$$

Si $B \subset \{0\}$ alors f définit une fibration localement triviale sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. De ce fait

$$\chi(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})) = \chi(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \chi(f^{-1}(1)).$$

La caractéristique d'Euler de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ étant nulle alors $\chi(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})) = 0$ et $\chi(f^{-1}(0)) = 1$.

Réciproquement, si f est primitif alors par la formule de Suzuki (voir [Su₇₄¹⁹] et le chapitre 1) :

$$1 - \chi(F_{gen}) = \sum_{c \in B} (\chi(F_c) - \chi(F_{gen})).$$

Si $\chi(F_0) = +1$ alors $\sum_{c \in B \setminus \{0\}} (\chi(F_c) - \chi(F_{gen})) = 0$. Mais si $c \in B$ alors $\chi(F_c) - \chi(F_{gen}) > 0$ (voir par exemple [NN₈₈²⁰]) donc $B \subset \{0\}$. \square

Nous notons h_0 la monodromie algébrique induite en homologie¹ sur $H_1(F_{gen})$ par un petit cercle $S_\varepsilon^1(0)$. Le fait essentiel – et évident – de ce chapitre est la remarque suivante : les monodromies induites par $S_r^1(0)$, pour tout $r > 0$, sont égales car 0 est la seule valeur irrégulière.

Nous notons \bar{f} la résolution de f obtenue par la résolution totale des singularités à l'infini et aussi par la résolution des singularités affines. Nous notons $D_0 = \bar{f}^{-1}(0)$ et $D_\infty = \bar{f}^{-1}(\infty)$. Leurs graphes duaux sont notés \bar{G}_0 et \bar{G}_∞ .

¹Homologie avec des coefficients entiers.

La monodromie induite par un petit cercle $S_\varepsilon^1(\infty)$ centré en ∞ de $\mathbb{C}P^1$ est exactement la monodromie h_0 munie de l'orientation inverse :

$$h_\infty = h_0^{-1}.$$

Cette propriété nous permet de prouver les trois lemmes suivants.

Lemme 9.3. La fibre $F_0 = f^{-1}(0)$ est rationnelle c'est-à-dire une sphère privée d'un certain nombre de points.

Preuve. Les notations sont celles du chapitre 7. Par le théorème 7.2, p. 66, les cycles invariants de h_0 sont $\text{Ker}(h_0 - id) = \text{Im } \ell_0$. Supposons que l'une des composantes irréductibles de F_0 ait du genre alors la fibre générique F_{gen} a du genre et les cycles correspondants sont les cycles induits par F_0° et sont des cycles invariants.

D'autre part, la proposition 7.3 affirme que les cycles invariants par toutes les monodromies associées aux éléments de $\pi_1(\mathbb{C} \setminus B, *)$ sont des cycles du bord de la fibre générique. Ici comme il n'y a qu'une seule monodromie, les cycles invariants par h_0 sont exactement les cycles invariants par toutes les monodromies ! Il ne peut donc y avoir de cycles invariants provenant du genre : cela fournit une contradiction. \square

Lemme 9.4. Il n'y a pas de cycle dans le graphe $\bar{G}_0 : H_1(\bar{G}_0) = 0$.

Preuve. Un théorème de F. Michel et C. Weber [MW₂₀] affirme tout d'abord que les cycles de \bar{G}_0 sont en correspondance avec les blocs de Jordan 2×2 de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour la monodromie h_0 ; ensuite ce théorème nous donne que h_∞ n'a pas de tels blocs car le graphe \bar{G}_∞ est un arbre ([LW₁₃]). Maintenant comme $h_0 = h_\infty^{-1}$, alors \bar{G}_0 n'a pas de cycle. \square

Lemme 9.5. Le tube $f^{-1}(S_r^1(0))$ est une variété de Seifert.

Preuve. Supposons que dans la décomposition minimale de Waldhausen de la variété $f^{-1}(S_r^1(0))$ il existe deux morceaux de Seifert distincts. Comme nous l'avons déjà vu (chapitre 2) cette décomposition peut être obtenue comme le bord d'un voisinage du diviseur D_0 ; de plus le twist de Dehn entre deux morceaux de Seifert est connu (voir la chapitre 5 ou [MW₂₀]) et est négatif. Mais la décomposition de $f^{-1}(S_r^1(0))$ peut aussi être obtenue comme le bord d'un voisinage de D_∞ (car $B \subset \{0\}$). De ce fait, la même formule prouve que le twist est positif puisque l'orientation du second bord est l'opposée du premier. Maintenant le twist est négatif et positif donc nul ce qui contredit le fait que les deux morceaux de Seifert sont distincts. \square

En d'autres termes, si nous appelons une singularité qui produit un morceau de Seifert dans la décomposition de $f^{-1}(S_r^1(0))$ une *singularité essentielle*, nous avons prouvé qu'il ne peut exister qu'une seule singularité essentielle. Les singularités affines non essentielles sont les singularités quadratiques ordinaires.

3 Généralisation du théorème de Zaïdenberg-Lin

Rapellons le théorème de Zaïdenberg-Lin, [ZL_{s3}¹⁹], [NR_{s7}¹⁹].

Théorème 9.6. Soit f un polynôme irréductible tel que la fibre $F_0 = f^{-1}(0)$ soit simplement connexe. Alors il existe deux entiers premiers entre eux p et q (ou $p = 1$ et $q = 0$) tels que :

$$f \sim x^p - y^q.$$

Le lemme suivant relie la topologie de F_0 au cas sans valeur irrégulière à l'infini.

Lemme 9.7. Soit f un polynôme réduit. Alors $B_{\text{aff}} \subset \{0\}$ et $B_\infty = \emptyset$ si et seulement si F_0 est simplement connexe.

Preuve du lemme. Si F_0 est simplement connexe alors la fibre irrégulière est connexe, donc la fibre générique est connexe également. Ainsi f est un polynôme primitif. De plus $\chi(F_0) = +1$ et $H_1(F_0) = \{0\}$; par le lemme 9.2, $B \subset \{0\}$. Soit T_0 le tube $f^{-1}(\Delta)$ où Δ est un petit disque centré en 0. Alors, comme dans la preuve du lemme 9.2, par additivité de la caractéristique d'Euler, nous avons $\chi(F_0) = \chi(T_0) = 1$. Puisque la fibre générique est connexe alors T_0 est connexe et $H_1(T_0) = \{0\}$. Nous savons que le morphisme $j_0 : H_1(F_0) \longrightarrow H_1(T_0)$ induit par l'inclusion est un isomorphisme si et seulement si 0 est une valeur régulière à l'infini (c'est le théorème 6.3). Dans notre cas j_0 est un isomorphisme car $H_1(F_0) = H_1(T_0) = \{0\}$ donc $B_\infty = \emptyset$.

Réciproquement, supposons $B_{\text{aff}} \subset \{0\}$ et $B_\infty = \emptyset$. Le polynôme f est primitif car f est réduit et $B \subset \{0\}$ donc $f^{-1}(\Delta)$ est connexe. Comme $B_\infty = \emptyset$, $f^{-1}(\Delta) \setminus B_R^4$ est juste le produit $(f^{-1}(\Delta) \cap S_R^3) \times]0, +\infty[$. Alors $f^{-1}(\Delta) \cap B_R^4$ est un ensemble connexe et donc $F_0 = f^{-1}(0)$ est connexe. Comme la caractéristique d'Euler de l'ensemble connexe F_0 est +1 alors toutes les composantes irréductibles de F_0 sont des disques (éventuellement singuliers) qui s'intersectent, mais sans cycle (lemme 9.4). En conclusion : F_0 est simplement connexe. \square

Nous obtenons comme corollaire que si $B = \{0\}$ avec $B_\infty = \{0\}$ alors F_0 n'est pas connexe : par contraposition si F_0 est connexe alors, comme $\chi(F_0) = +1$, toutes les composantes irréductibles sont des disques; mais comme il n'y a pas de cycle (lemme 9.4) alors F_0 est simplement connexe donc $B_\infty = \emptyset$.

Le théorème de Zaïdenberg-Lin se généralise dans le cas où f n'est pas irréductible.

Théorème 9.8. Soit f un polynôme réduit vérifiant $B_{\text{aff}} = \{0\}$ et $B_\infty = \emptyset$ alors

$$f \sim xg(y) \quad \text{ou} \quad f \sim x^\varepsilon y^{\varepsilon'} \prod_i (x^p - \alpha_i y^q),$$

avec $g \in \mathbb{C}[y]$, $\varepsilon, \varepsilon' \in \{0, 1\}$, p, q premiers entre eux, et $\{\alpha_i\}$ une famille finie de nombres complexes distincts non nuls.

Ce résultat est énoncé dans [ZL_{s3}¹⁹]. Comme il n'existe pas de preuve de ceci dans la littérature nous en donnons une. Notre preuve utilise des idées provenant de [BF₉₈¹⁹], [NR_{s7}¹⁹] et [Ru_{s2}¹⁹]. Nous utiliserons aussi le théorème 9.6 pour un facteur irréductible de f . Nous aurons besoin du lemme suivant qui est une version améliorée du théorème d'Abhyankar-Moh.

Lemme 9.9. Soient \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 deux disques ayant pour équations $(f_1 = 0)$ et $(f_2 = 0)$.

1. Si $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$ alors $f_1 f_2 \sim x(x + \alpha)$, ($\alpha \in \mathbb{C}^*$).
2. Si \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 s'intersectent de façon transverse alors $f_1 f_2 \sim xy$.

Preuve. Par le théorème d'Abhyankar-Moh une équation pour \mathcal{C}_1 peut être choisie comme $(x = 0)$. Comme dans [NR_{s7}¹⁹] une paramétrisation de \mathcal{C}_2 est $(P(t), Q(t))$, avec $P, Q \in \mathbb{C}[t]$. Si \mathcal{C}_2 n'intersecte pas \mathcal{C}_1 alors $P(t)$ est une constante non nulle. Si \mathcal{C}_2 intersecte \mathcal{C}_1 transversalement alors, comme dans la preuve du théorème d'Abhyankar-Moh par W. Neumann et L. Rudolph ([NR_{s7}¹⁹]), des automorphismes polynomiaux du type $(x, y) \mapsto (x, y + \lambda x^\mu)$ nous permettent de choisir $(y = 0)$ comme équation de \mathcal{C}_2 . \square

Preuve du théorème 9.8. S'il n'y a pas de singularités essentielles alors les singularités sont des singularités quadratiques ordinaires. Comme F_0 est simplement connexe alors F_0 est l'union de disques lisses $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_r$. Supposons que \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 s'intersectent transversalement. Alors, par le lemme ci-dessus, une équation de $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ est $(xy = 0)$, de plus un autre disque \mathcal{C}_3 ne peut rencontrer \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sinon il existerait un cycle dans \bar{G}_0 ou une singularité essentielle. Donc \mathcal{C}_3 a pour équation, par exemple, $(y + \beta_3 = 0)$. Les autres disques \mathcal{C}_i , $i \geq 4$ sont parallèles à \mathcal{C}_3 car sinon il existerait des cycles dans \bar{G}_0 . Donc \mathcal{C}_i a pour équation $(y + \beta_i = 0)$. Ainsi f est algébriquement équivalent à $xy \prod_i (y + \beta_i)$.

Supposons qu'il existe une singularité essentielle. Alors par le lemme 9.5 il n'en existe qu'une; toutes les autres singularités sont des singularités quadratiques ordinaires. De plus comme $B_\infty = \emptyset$ et comme le tube $f^{-1}(S_r^1(0))$ est une variété de Seifert (lemme 9.5) alors l'entrelacs à l'infini $K_0 = f^{-1}(0) \cap S_R^3$ est un entrelacs de Seifert. Par [NR_{s7}¹⁹], comme $B_{\text{aff}} = \{0\}$ et $B_\infty = \emptyset$, cet entrelacs est la somme connexe des entrelacs des singularités locales situées sur $f^{-1}(0)$, c'est-à-dire que l'entrelacs à l'infini est la somme connexe de l'entrelacs local de la singularité essentielle avec des entrelacs de Hopf. Mais un entrelacs de Seifert n'a jamais une telle structure donc il n'existe qu'une singularité. Ainsi l'entrelacs local et l'entrelacs à l'infini sont isotopes et sont un sous-entrelacs de

$$\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}(p, q) \cup \mathcal{O}(p, q) \cup \dots$$

Les notations sont les suivantes : dans la sphère S_r^3 de \mathbb{C}^2 , \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 sont des nœuds triviaux tels que $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ soit l'entrelacs de Hopf; $\mathcal{O}(p, q)$ est le nœud torique de type (p, q) (p et q sont non nuls et premiers entre eux) tel que l'entrelacs $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}(p, q) \cup \mathcal{O}(p, q) \cup \dots$ soit isotope à l'entrelacs

$$((x = 0) \cup (y = 0) \cup (x^p - y^q = 0) \cup (x^p - 2y^q = 0) \cup \dots) \cap S_r^3$$

Nous allons montrer que f a l'écriture voulue à équivalence algébrique près. Nous discutons selon le nombre de disques lisses existant dans F_0 .

Premier cas. Supposons que dans F_0 il existe deux disques lisses transverses alors, par le lemme 9.9 et à équivalence algébrique près, une équation de f est $xyg_1(x, y) \dots g_n(x, y)$. Dans ces coordonnées (x, y) , soit $(P(t), Q(t))$ une paramétrisation polynomiale injective de la courbe $(g_i(x, y) = 0)$. L'entrelacs local est de type $\mathcal{O}(p, q)$ donc cette paramétrisation s'écrit :

$$\begin{cases} P(t) &= a_q t^q + \dots + a_N t^N \\ Q(t) &= b_p t^p + \dots + b_M t^M \end{cases}$$

avec $N \geq q$ et $M \geq p$. Comme $(0, 0)$ est le seul point d'intersection de $(xy = 0)$ avec $(g_i(x, y) = 0)$ alors $P(t) = 0$ implique $Q(t) = 0$ ce qui entraîne $t = 0$. Donc P est de la forme $P(t) = a_p t^p$ et de façon symétrique $Q(t) = b_q t^q$ d'où $g_i(x, y) = x^p - \alpha_i y^q$.

Deuxième cas. Si F_0 a un seul disque lisse alors dans certaines coordonnées une équation de f est $xg_1(x, y) \dots g_n(x, y)$. Comme ci-dessus, soit $(P(t), Q(t))$ une paramétrisation de $(g_i(x, y) = 0)$; nous obtenons encore $P(t) = a_q t^q$ ($q \geq 2$) mais avec $Q(t) = b_p t^p + \dots + b_M t^M$. Nous concluons comme dans [NR₅₇]: la paramétrisation $(a_q t^q, Q(t))$ est injective donc $Q(t) - Q(\zeta t)$ n'a que la racine $t = 0$ pour tout ζ racine q -ième de l'unité. Donc $Q(t)$ est de la forme $Q(t) = b_p t^p + F(t^q)$ et le changement de coordonnées $(x, y) \mapsto (x, y - F(x))$ qui conserve l'axe $(x = 0)$ donne la paramétrisation $(a_q t^q, b_p t^p)$ dans ces nouvelles coordonnées. Donc $g_i(x, y) = x^p - \alpha_i y^q$.

Troisième cas. Si F_0 n'a pas de disque lisse nous pouvons supposer que pour la décomposition $f = g_1 \dots g_n$ on ait $g_1(x, y) = x^p - y^q$ par le théorème de Zaidenberg-Lin pour la composante irréductible $(g_1 = 0)$. Soit $(g_i = 0)$ une autre composante ayant pour paramétrisation $(P(t), Q(t)) = (a_q t^q + \dots + a_N t^N, b_p t^p + \dots + b_M t^M)$. L'entrelacs à l'infini de $(g_i = 0)$ est un nœud torique itéré de type $\mathcal{O}(m, n; m_2, n_2; \dots; m_k, n_k)$ d'après [Ru₅₂], avec $m = M / \text{pgcd}(M, N)$ et $n = N / \text{pgcd}(M, N)$. Mais l'entrelacs à l'infini de $(g_i = 0)$ est isotope à l'entrelacs local donc est de type $\mathcal{O}(p, q)$. Comme

dans [NR₈₇⁹] soit $\mathcal{O}(m, n) = \mathcal{O}(p, q)$ et alors $\text{pgcd}(M, N) = 1$ et $M = p$, $N = q$ et c'est fini ; soit $\mathcal{O}(m, n)$ est le nœud trivial et alors M divise N ou N divise M . Cela implique que $qM \neq pN$. Comme les composantes $(g_1 = 0)$ et $(g_i = 0)$ ne s'intersectent pas ailleurs qu'en l'origine alors $g_1(P(t), Q(t))$ est de la forme t^ℓ . Si nous supposons par exemple $qM > pN$ alors $\ell = qM$. Or la valuation de $g_1(P(t), Q(t))$ est la multiplicité d'intersection de g_1 et de g_i en $(0, 0)$ qui est pq . Donc $\ell = pq$ d'où $M = p$ et comme ci-dessus $N = q$.

□

4 Cas $B_{\text{aff}} = \emptyset$ et $B_\infty = \{0\}$

Notons $f = f_1 \times \cdots \times f_r$ la décomposition de f en facteurs irréductibles et $\mathcal{C}_i = f_i^{-1}(0)$ la courbe algébrique associée à f_i . Nous obtenons tout d'abord une classification « abstraite » : nous décrivons les courbes \mathcal{C}_i comme des sphères trouées.

Proposition 9.10. Dans le cas $B_{\text{aff}} = \emptyset$ et $B_\infty = \{0\}$, nous pouvons réordonner les $(\mathcal{C}_i)_i$ de telle sorte que :

- soit \mathcal{C}_1 est un disque et pour $i = 2, \dots, r$, \mathcal{C}_i est un anneau ;
- ou $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{r-1}$ sont des disques et \mathcal{C}_r est une sphère r -trouée.

Cette proposition a été également indépendamment obtenue dans [GP₉₉¹⁹].

Preuve. Remarquons que, puisque $B_{\text{aff}} = \emptyset$, les composantes \mathcal{C}_i ($i = 1, \dots, r$) sont disjointes, alors

$$\chi(\mathcal{C}_1) + \cdots + \chi(\mathcal{C}_r) = \chi(F_0) = 1,$$

et l'une de ces composantes a sa caractéristique d'Euler strictement positive. Mais comme $\chi(\mathcal{C}_i) \leq 1$ quelque soit i , nous pouvons supposer que les composantes de caractéristique d'Euler +1 sont les $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_j$ ($j \geq 1$).

Premièrement nous supposons que $j = 1$; toutes les autres composantes vérifient $\chi(\mathcal{C}_i) \leq 0$ pour $i \geq 2$. Ceci implique que $\chi(\mathcal{C}_i) = 0$ ($i = 2, \dots, r$). En résumé la composante \mathcal{C}_1 est un disque et les autres sont des anneaux.

Deuxièmement nous supposons que $j \geq 2$. Par le théorème d'Abhyankar-Moh (en fait, le lemme 9.9) nous pouvons supposer que les disques $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_j$ sont des droites parallèles ayant pour équation $(x = \alpha_1), \dots, (x = \alpha_j)$. Toutes les autres composantes ont, au moins, $j+1$ branches à l'infini car elles n'intersectent pas les droites parallèles. En particulier nous avons $\chi(\mathcal{C}_i) \leq 2 - (j + 1)$ pour $i > j$; donc

$$\begin{aligned} 1 = \chi(F_0) &= \chi(\mathcal{C}_1) + \cdots + \chi(\mathcal{C}_j) + \chi(\mathcal{C}_{j+1}) + \cdots + \chi(\mathcal{C}_r) \\ &\leq \quad \quad \quad j \quad \quad \quad + (1 - j) + \cdots + (1 - j) \leq 1. \end{aligned}$$

Ainsi cette inégalité est une égalité ; cela entraîne que $j + 1 = r$ et $\chi(\mathcal{C}_{j+1}) = 2 - (j + 1) = 2 - r$. En particulier il y a exactement r branches à l'infini. Toutes les composantes sont des disques, sauf la dernière qui est une sphère r -trouée. Ceci termine la preuve. \square

Nous aurons besoin d'une version de la formule de Riemann-Hurwitz. Soient $\bar{\mathcal{C}}$ et $\bar{\mathcal{C}}'$ des surfaces de Riemann compactes et soit $\pi : \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \bar{\mathcal{C}}'$ une application holomorphe surjective de degré n . Pour \mathcal{S} un ensemble fini de points dans $\bar{\mathcal{C}}'$, nous notons $\mathcal{C}' = \bar{\mathcal{C}}' \setminus \mathcal{S}$ et $\mathcal{C} = \bar{\mathcal{C}} \setminus \pi^{-1}(\mathcal{S})$. Pour tout point $s \in \mathcal{C}'$, $\nu(s)$ est la multiplicité de π en $s \in \mathcal{C}'$, nous avons $\sum_{t \in \pi^{-1}(s)} (\nu(t) - 1) = n - \#\pi^{-1}(s)$.

Théorème 9.11 (formule de Riemann-Hurwitz).

$$\chi(\mathcal{C}) = n \cdot \chi(\mathcal{C}') - \sum_{s \in \mathcal{C}} (\nu(s) - 1).$$

Preuve. La preuve est similaire à la preuve usuelle (voir par exemple [Ki19]). Nous notons abusivement $\mathcal{C}' = \bar{\mathcal{C}}' \setminus \mathcal{N}(\mathcal{S})$ et $\mathcal{C} = \bar{\mathcal{C}} \setminus \pi^{-1}(\mathcal{N}(\mathcal{S}))$ où $\mathcal{N}(\mathcal{S})$ est une union de petits disques ouverts centrés en les points de \mathcal{S} . Soit (V', E', F') une triangulation de \mathcal{C}' telle que les points de ramification soient contenus dans $\pi^{-1}(V')$. Nous notons $v' = \#V'$, $e' = \#E'$, ... Il existe une triangulation (V, E, F) de \mathcal{C} au-dessus de (V', E', F') telle que $e = ne'$, $f = nf'$ et $v = nv' - \sum_{t \in V'} (n - \#\pi^{-1}(t))$. Alors $\chi(\mathcal{C}) = f - e + v = n(f' - e' + v') - \sum_{t \in V'} (n - \#\pi^{-1}(t)) = n\chi(\mathcal{C}') - \sum_{s \in \mathcal{C}} (\nu(s) - 1)$. \square

Nous utiliserons cette formule pour une composante $\mathcal{C} = \mathcal{C}_i$ qui n'est pas un disque, avec la compactification naturelle $\bar{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C} : \bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_\infty$. Nous définissons $\bar{\mathcal{C}}' = \mathbb{C}P^1$ et si les disques $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_j$ ont pour équation $(x = \alpha_1), \dots, (x = \alpha_j)$, nous définissons $\mathcal{S} = \{\infty, \alpha_1, \dots, \alpha_j\}$ et $\mathcal{C}' = \mathbb{C}P^1 \setminus \mathcal{S} = \mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_j\}$. La projection $\pi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ est définie par $\pi(x, y) = x$. Alors π peut être prolongée holomorphiquement sur $\bar{\mathcal{C}}$. Si nous montrons que $\pi^{-1}(\mathcal{S}) = \mathcal{C}_\infty$ alors nous pourrons appliquer la formule de Riemann-Hurwitz.

Nous donnons maintenant la classification algébrique.

Proposition 9.12. Selon les cas de la proposition 9.10 ci-dessus, pour un polynôme réduit f avec $B_{\text{aff}} = \emptyset$ et $B_\infty = \{0\}$ alors

- soit $f \sim x\sigma^\varepsilon \prod_i (x^p \sigma^q - \alpha_i)$ ou $f \sim x\sigma^\varepsilon \prod_i (x^p - \alpha_i \sigma^q)$ avec p et q premiers entre eux, $\varepsilon \in \{0, 1\}$ et $\{\alpha_i\}$ est une famille de nombres complexes distincts non nuls. De plus $\sigma = \sigma(x, y) = x^s y + \ell(x)$ avec $\ell \in \mathbb{C}[x]$, $\deg \ell < s$ (si $s > 0$ alors $\ell(0) \neq 0$, si $s = 0$ alors $\ell = 0$). Si $\varepsilon = 1$ alors $s > 0$ et dans le premier cas p (ou q) est plus grand que 1.

- ou $f \sim g_{red}(x)(g(x)y + h(x))$ avec $g, h \in \mathbb{C}[x]$, $\deg g \geq 2$, $\deg g > \deg h$ et $h(t) \neq 0$ si $g(t) = 0$.

Le premier cas de la proposition 9.10 a été étudié par S. Kaliman, nous rappelons brièvement la jolie preuve de [Ka¹⁹⁸]. Soit g une équation de la courbe algébrique $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}$ où \mathcal{C}_1 est un disque lisse et $\mathcal{C} = \mathcal{C}_i$ ($i \geq 2$) est un anneau disjoint.

Lemme 9.13.

$$g \sim x(x^p - \sigma^q) \quad \text{ou} \quad g \sim x(x^p \sigma^q - 1)$$

p, q sont des entiers premiers entre eux et $\sigma = \sigma(x, y) = x^s y + \ell(x)$ ($s > 0$ dans le premier polynôme) avec $\ell \in \mathbb{C}[x]$, $\deg \ell < s$ et $\ell(0) \neq 0$ si $s > 0$.

Preuve. Par le théorème d'Abhyankar-Moh nous pouvons supposer que $(x = 0)$ est une équation du disque \mathcal{C}_1 ; soit $k(x, y)$ une équation de \mathcal{C} dans ces coordonnées, il existe $m > 0$ tel que $k(x, x^{-m}y) = x^e h(x, y)$ avec $e < 0$, $h \in \mathbb{C}[x, y]$ et $h(0, y) = y^n$, $n \geq 1$.

Si nous notons \mathcal{C}' la courbe d'équation $(h = 0)$ alors «l'éclatement» $(x, y) \mapsto (x, x^{-m}y)$ donne un isomorphisme de $\mathcal{C}' \setminus \{(0, 0)\}$ vers \mathcal{C} . Donc \mathcal{C}' est homéomorphe à un disque et d'après le théorème de Zaïdenberg-Lin, le polynôme $xh(x, y)$ est égal à $u(u^{p'} - v^{q'})$. Les nouvelles coordonnées sont obtenues par $u = x$ et $v = y + \varphi(x)$, alors $h(x, y) = x^{p'} - (y + \varphi(x))^{q'}$. En revenant à k par $k(x, y) = x^e h(x, x^m y)$ et en distinguant les cas $e + p' = 0$ et $e + p' > 0$ nous obtenons $k(x, y) = 1 - x^p \sigma^q$ et $k(x, y) = x^p - \sigma^q$, avec $\sigma(x, y) = x^s y + \ell(x)$. Par des automorphismes triangulaires du type $(x, y) \mapsto (x, y + \lambda x^\mu)$ nous obtenons $\deg \ell < s$. Ceci termine la preuve. \square

La généralisation au cas avec plusieurs anneaux correspond à la généralisation du théorème de Zaïdenberg-Lin (théorème 9.8).

Preuve de la proposition 9.12. Nous nous occupons du second cas de la proposition 9.12, les disques ont pour équation $\prod_{i=1}^{r-1} (x - \alpha_i)$ et une équation de \mathcal{C}_r est

$$\prod_{i=1}^{r-1} (x - \alpha_i)^{m_i} (a_n(x)y^n + \cdots + a_1(x)y) + h(x)$$

avec $h(\alpha_i) \neq 0$ et $m_i > 0$. La projection $\pi : \mathcal{C}_r \longrightarrow \mathcal{C}' = \mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}\}$ est donnée par $\pi(x, y) = x$, elle est de degré n et vérifie les hypothèses de notre formule de Riemann-Hurwitz puisque les points à l'infini de \mathcal{C}_r correspondent à $\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}$. Comme $\chi(\mathcal{C}_r) = \chi(\mathcal{C}')$ alors $n = 1$ et a_n est une constante. L'équation de \mathcal{C}_r est maintenant $\prod_{i=1}^{r-1} (x - \alpha_i)^{m_i} y + h(x)$ et par des automorphismes triangulaires $(x, y) \mapsto (x, y + \lambda x^\mu)$ nous pouvons supposer que $\deg h < \deg \prod_{i=1}^{r-1} (x - \alpha_i)^{m_i}$. \square

5 Cas $B_{\text{aff}} = \{0\}$ et $B_{\infty} = \{0\}$

Les notations sont celles du paragraphe précédent.

Proposition 9.14. Pour un polynôme réduit f avec $B_{\text{aff}} = \{0\}$ et $B_{\infty} = \{0\}$

- soit \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont des disques qui s'intersectent et \mathcal{C}_i ($i = 3, \dots, r$) sont des anneaux disjoints ;
- ou $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_j, \mathcal{C}_{j+1}, \dots, \mathcal{C}_{r-1}$ sont des disques disjoints et \mathcal{C}_r est une sphère $(j+1)$ -trouée. De plus $\mathcal{C}_{j+1}, \dots, \mathcal{C}_{r-1}$ intersectent \mathcal{C}_r transversalement.

La liste algébrique correspondante est

- soit $f \sim xy \prod_i (x^p y^q - \alpha_i)$ avec $p > 1$ et q premiers entre eux, $\alpha_i \in \mathbb{C}^*$.
- ou $f \sim g_{\text{red}}(x)k(x)(g(x)y + h(x))$ avec $g, h, k \in \mathbb{C}[x]$ (g et k non constants, k réduit) tels que $\deg h < \deg g$ et si $g(t) = 0$ alors $h(t) \neq 0$.

Lemme 9.15. Une composante irréductible de $F_0 = f^{-1}(0)$ est un disque lisse.

Nous allons faire la distinction entre « lisse » et « lisse dans F_0 » : une composante lisse n'est pas nécessairement lisse dans F_0 , il peut exister des singularités sur cette composante provenant de l'intersection avec d'autres composantes.

Preuve du lemme. Rappelons que d'après le lemme 9.5 nous savons qu'il n'existe qu'une singularité essentielle et que les singularités affines non essentielles sont les singularités quadratiques ordinaires. Les singularités non essentielles à l'infini correspondent à un bambou pour $\pi^{-1}(L_{\infty}) \cap \bar{f}^{-1}(0)$ (π est le morphisme intervenant dans la résolution de f) qui intersecte la compactification d'un disque lisse et d'une autre composante (éventuellement singulière) de F_0 . De plus les multiplicités de \bar{f} sont égales à 1 sur toutes les composantes du bambou. Un exemple classique est le polynôme de Broughton $f(x, y) = x(xy + 1)$. Un autre exemple sera donné au paragraphe 6.

Si nous supposons que toutes les singularités affines sont des singularités quadratiques ordinaires alors l'une des composantes est un disque (car $\chi(F_0) = +1$) et il est lisse parce que il ne peut pas s'intersecter lui-même car il n'y a pas de cycle dans \bar{G}_0 .

S'il existe une singularité affine essentielle, elle est unique et les singularités à l'infini ne sont pas essentielles. Un des disques associés à une singularité non essentielle à l'infini est lisse et donc convient. \square

Preuve de la proposition 9.14. Soit \mathcal{C}_1 le disque provenant du lemme 9.15. Nous notons $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$ tous les disques parallèles à \mathcal{C}_1 . D'après Abhyankar-Moh, nous pouvons supposer que les équations pour ces disques sont $(x = \alpha_1), \dots, (x = \alpha_k)$. Soit \mathcal{C} l'un de ces \mathcal{C}_i ($i > k$) qui n'intersecte pas l'un des $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$. Après avoir réordonné les $(\mathcal{C}_i)_i$ nous notons $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_j$ ($1 \leq j \leq k$) les disques qui n'intersectent pas \mathcal{C} .

Alors, comme ci-dessus dans la proposition 9.10, $\chi(\mathcal{C}) = 1 - j$ et \mathcal{C} a exactement $j + 1$ branches à l'infini.

Pour $\mathcal{C}' = \mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_j\}$ nous avons $\chi(\mathcal{C}) = \chi(\mathcal{C}')$ et les points à l'infini correspondent à $\alpha_1, \dots, \alpha_j$. La formule de Riemann-Hurwitz pour le revêtement $\pi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ défini par $(x, y) \mapsto x$ prouve que π est non ramifié et que \mathcal{C} est lisse.

Les singularités provenant de l'intersection avec d'autres composantes ne peuvent provenir que des intersections transverses d'un disque lisse avec une autre composante : tout d'abord pour conserver $\chi(F_0) = +1$ deux composantes qui ont une caractéristique d'Euler négative ne peuvent se couper ; ensuite un disque qui intersecte le disque \mathcal{C}_1 est lisse, sinon cela contredirait la configuration pour les singularités non essentielles à l'infini ; et finalement pour éviter des cycles dans \bar{G}_0 , seules deux directions pour les disques (par exemple $(x = 0)$ et $(y = 0)$) peuvent exister. Ainsi il n'y a pas de point multiple d'ordre strictement supérieur à 2. Nous avons prouvé que les singularités affines étaient des singularités quadratiques ordinaires.

Nous terminons la classification comme dans la proposition 9.12. Si $j = 1$ et \mathcal{C}_1 n'est pas lisse dans F_0 alors pour des raisons de caractéristique d'Euler il ne peut y avoir qu'un disque supplémentaire \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_2 intersecte transversalement \mathcal{C}_1 . Avec la classification algébrique des anneaux, nous voyons qu'un seul type d'anneau peut exister :

$$f \sim xy \prod_i (x^p y^q - \alpha_i),$$

où $\{\alpha_i\}$ est une famille de nombres complexes non nuls.

Pour des raisons similaires, si $j = 1$ et le disque \mathcal{C}_1 est lisse dans F_0 , alors un seul anneau peut exister. Mais des disques \mathcal{C}_i ($i = 2, \dots, r - 1$) peuvent rencontrer cet anneau. Alors

$$f \sim x \prod_i (x - \beta_i) (x^s y + \ell(x)).$$

Le cas $j \geq 2$ est traité comme dans la proposition 9.12 avec des droites parallèles en plus :

$$f \sim \prod_i (x - \alpha_i) \prod_i (x - \beta_i) \left(\prod_i (x - \alpha_i)^{m_i} y + h(x) \right).$$

Ceci termine la preuve. □

Le tableau résume la liste algébrique des polynômes réduits qui n'ont qu'une valeur irrégulière. Les notations sont celles du théorème 9.8 et des propositions 9.12 et 9.14.

	$B_{\text{aff}} = \emptyset$	$B_{\text{aff}} = \{0\}$
$B_\infty = \emptyset$	x	$yg(x)$ ou $x^\varepsilon y^{\varepsilon'} \prod_i (x^p - \alpha_i y^q)$
$B_\infty = \{0\}$	$x\sigma^\varepsilon \prod_i (x^p \sigma^q - \alpha_i)$ ou $x\sigma^\varepsilon \prod_i (x^p - \alpha_i \sigma^q)$ ou $g_{\text{red}}(x)(g(x)y + h(x))$	$xy \prod_i (x^p y^q - \alpha_i)$ ou $g_{\text{red}}(x)k(x)(g(x)y + h(x))$

6 Classification topologique

Rappelons que deux polynômes f et g sont *topologiquement équivalents* ($f \approx g$) s'il existe des homéomorphismes Φ et Ψ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{C}^2 \\
 f \downarrow & & \downarrow g \\
 \mathbb{C} & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{C}.
 \end{array}$$

Deux polynômes algébriquement équivalents sont topologiquement équivalents mais la réciproque est fautive. Par exemple $f(x, y) = x(x^2y + 1)$ et $g(x, y) = x(x^2y + x + 1)$ sont topologiquement équivalents (ils ont le même graphe coloré, voir ci-dessous) mais ils ne sont pas algébriquement équivalents (un algorithme pour déterminer si deux polynômes sont algébriquement équivalents est donné dans [Wi30]).

Pour un polynôme f ayant pour résolution \bar{f} , nous définissons le *graphe coloré* G_f . Un sommet du graphe dual de la résolution est coloré par la valeur de ϕ sur la composante irréductible associée au sommet. Dans le cas $B = \{0\}$ les couleurs sont ∞ (cela correspond au sous-graphe \bar{G}_∞), 0 (pour \bar{G}_0) et $\mathbb{C}P^1$ pour les composantes dicritiques. De plus les sommets sont marqués par l'auto-intersection de la composante correspondante ; pour les sommets qui correspondent aux composantes irréductibles de $f^{-1}(0)$ le poids est « aff ». Dans notre situation toutes les composantes sont rationnelles et nous n'avons pas besoin d'ajouter le genre de chaque composante. Sur la figure 28 sont dessinés les graphes pour les polynômes f et g définis plus haut.

Deux graphes colorés sont *équivalents* si après une suite d'absorptions et d'éclatements (voir la figure 29) ils sont isomorphes (avec le respect des couleurs et des poids). Nous n'autorisons pas les composantes dicritiques à disparaître lors de cette opération, c'est-à-dire que la couleur c de la figure 29 appartient à $\{0, \infty\}$.

Proposition 9.16. Considérons deux polynômes réduits ayant une seule valeur irrégulière. S'ils ont des graphes colorés équivalents alors ils sont topologiquement équivalents.

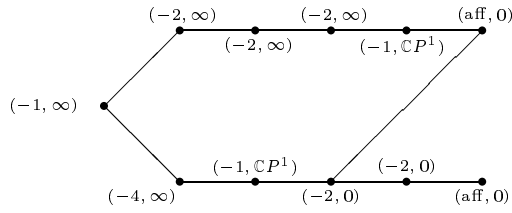


Fig. 28 – Graphes des polynômes f et g

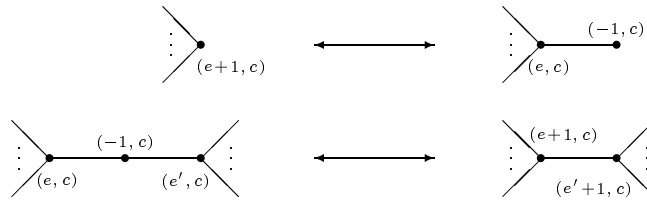


Fig. 29 – Absorption et éclatement

Cette proposition ne peut pas être généralisée au cas de plusieurs valeurs irrégulières. Un contre-exemple est donné dans [Ar¹⁹]. Par contre, la réciproque est vraie : les idées principales pour prouver ceci sont dans la preuve de la proposition, on peut également se référer à [Fo¹⁹].

Preuve. Soient f et g des polynômes avec une seule valeur irrégulière 0 et avec des graphes colorés équivalents. Soient (π_f, \bar{f}) , (π_g, \bar{g}) provenant des résolutions de f et de g . Nous pouvons supposer, après une succession d’absorptions et d’éclatements, que les graphes sont égaux. Nous posons $D_{f,0} = \bar{f}^{-1}(0)$ et $D_{g,0} = \bar{g}^{-1}(0)$. Par des arguments standards ([A’C¹³], [Du¹³], [Fo¹⁹]), un petit voisinage de $D_{f,0}$ est homéomorphe à un petit voisinage de $D_{g,0}$. Comme toutes les composantes de $D_{f,0}$ et de $D_{g,0}$ sont rationnelles alors les monodromies pour \bar{f} et \bar{g} induites par un petit cercle autour de la valeur 0 agissent de façon équivalente : c’est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{f}^{-1}(\Delta) & \xrightarrow{\bar{\Phi}_0} & \bar{g}^{-1}(\Delta') \\
 f \downarrow & & \downarrow g \\
 \Delta & \xrightarrow{\Psi_0} & \Delta'
 \end{array}$$

où $\bar{\Phi}_0$ et Ψ_0 sont des homéomorphismes et Δ, Δ' sont des petits disques topologiques fermés de \mathbb{C} avec $0 \in \text{Int } \Delta \cap \text{Int } \Delta'$.

Soit $D_{f,0}^\infty = D_{f,0} \cap \pi_f^{-1}(L_\infty)$ le diviseur de $D_{f,0}$ qui correspond à l'irrégularité à l'infini de la valeur 0 ($D_{g,0}^\infty$ est défini de la même façon). Alors $\bar{\Phi}_0$ définit un homéomorphisme entre $D_{f,0}^\infty$ et $D_{g,0}^\infty$. Donc l'homéomorphisme $\bar{\Phi}_0$ de $\bar{f}^{-1}(\Delta) \setminus D_{f,0}^\infty$ vers $\bar{g}^{-1}(\Delta') \setminus D_{g,0}^\infty$ peut être restreint en un homéomorphisme Φ_0 qui respecte la fibration parce que $f \circ \pi_f = \bar{f}$ sur l'ensemble $\bar{f}^{-1}(\Delta) \setminus D_{f,0}^\infty$. Nous avons prouvé que f et g sont topologiquement équivalents dans un voisinage de la fibre F_0 :

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(\Delta) & \xrightarrow{\Phi_0} & g^{-1}(\Delta') \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ \Delta & \xrightarrow{\Psi_0} & \Delta'. \end{array}$$

Nous expliquons comment prolonger ces homéomorphismes. Nous avons d'abord les homéomorphismes ϕ_f et ψ_f qui trivialisent la fibration de f sur $\partial\Delta$ (voir les diagrammes). La relation d'équivalence \simeq est donnée par l'utilisation de la monodromie géométrique h_f sur $F_{gen} : (h_f(x), 0) \simeq (x, 1)$ sur $F_{gen} \times I$ ($I = [0, 1]$). Comme $B \subset \{0\}$ nous pouvons étendre ϕ_f à $f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \text{Int } \Delta)$ pour obtenir $\bar{\phi}_f$; ψ_f peut être étendu à $\bar{\psi}_f$. La relation d'équivalence \simeq est étendue par $(h_f(x), 0, t) \cong (x, 1, t)$ sur $F_{gen} \times I \times \mathbb{R}_+$; nous avons trivialisé la fibration f sur $\mathbb{C} \setminus \text{Int } \Delta$.

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(\partial\Delta) & \xrightarrow{\phi_f} & F_{gen} \times I / \simeq \\ f \downarrow & & \downarrow \text{pr} \\ \partial\Delta & \xrightarrow{\psi_f} & S^1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \text{Int } \Delta) & \xrightarrow{\bar{\phi}_f} & F_{gen} \times I \times \mathbb{R}_+ / \cong \\ f \downarrow & & \downarrow \text{pr} \\ \mathbb{C} \setminus \text{Int } \Delta & \xrightarrow{\bar{\psi}_f} & S^1 \times \mathbb{R}_+ \end{array}$$

La fibre générique de g est homéomorphe à la fibre générique de f . Une construction similaire peut être effectuée pour g afin d'obtenir $\phi_g, \psi_g, \bar{\phi}_g, \bar{\psi}_g$. Soient $\phi_{fg} = \phi_g \circ \Phi_0 \circ \phi_f^{-1}$ et $\psi_{fg} = \psi_g \circ \Psi_0 \circ \psi_f^{-1}$. Nous définissons $\bar{\phi}_{fg} : F_{gen} \times I \times \mathbb{R}_+ / \cong \rightarrow F_{gen} \times I \times \mathbb{R}_+ / \cong$ avec $\bar{\phi}_{fg}(x, s, t) = (\phi_{fg}(x, s), t)$ et $\bar{\psi}_{fg} : S^1 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}_+$ avec $\bar{\psi}_{fg}(s, t) = (\psi_{fg}(s), t)$. Alors Φ_0 peut être prolongé par $\bar{\phi}_g^{-1} \circ \bar{\phi}_{fg} \circ \bar{\phi}_f$ et Ψ_0 par $\bar{\psi}_g^{-1} \circ \bar{\psi}_{fg} \circ \bar{\psi}_f$. \square

Théorème 9.17. Un polynôme réduit ayant au plus une valeur irrégulière est topologiquement équivalent à un et seulement un des polynômes suivants (les notations sont celles de l'introduction) :

	$B_{\text{aff}} = \emptyset$	$B_{\text{aff}} = \{0\}$
$B_\infty = \emptyset$	x	$yg_{\text{red}}(x)$ or $x \prod_{i=1}^n (x^p - iy)$ or $x^\varepsilon y^{\varepsilon'} \prod_{i=1}^n (x^p - iy^q)$
$B_\infty = \{0\}$	$x \prod_{i=1}^n (x^p y^q - i)$ or $x\sigma \prod_{i=1}^n (x^p \sigma^q - i)$ or $x\sigma^\varepsilon \prod_{i=1}^n (x^p - i\sigma^q)$ or $g_{\text{red}}(x)(g(x)y + 1)$	$xy \prod_{i=1}^n (x^p y^q - i)$ or $g_{\text{red}}(x)k(x)(g(x)y + 1)$

Preuve. Nous devons d'abord prouver que la liste des polynômes obtenue à équivalence algébrique près peut être réduite, à équivalence topologique près, à la liste ci-dessus. Finalement nous devons prouver que deux polynômes distincts de cette liste ne sont pas topologiquement équivalents.

Pour les cas avec $B_\infty = \emptyset$, remplacer α_i par i ne change pas le polynôme, à équivalence topologique près. De plus la liste, pour ces cas, n'est pas redondante.

Étudions ce qui se passe pour le cas $B_\infty = \{0\}$. Soit f l'un des polynômes provenant de la liste algébrique et soit f' le polynôme correspondant avec la constante 1 à la place du polynôme $\ell(x)$ ou de $h(x)$ et avec i au lieu de α_i . Nous prouvons que $f \approx f'$ en montrant que leurs graphes G_f et $G_{f'}$ sont équivalents. Comme f et f' ont le même comportement à distance finie, nous étudions seulement ce qui se passe à l'infini.

Soit $F(x, y, z)$ le polynôme homogène associé à f , $P_1 = (1:0:0)$ et $P_2 = (0:1:0)$ sont les deux points à l'infini de f . Notons $f_1(y, z) = F(1, y, z)$, $f_2(x, z) = F(x, 1, z)$ les équations locales de F aux points P_1 et P_2 . Pour calculer la partie de G_f à l'infini, nous avons deux possibilités (qui sont équivalentes).

Premièrement nous pouvons calculer les entrelacs irréguliers à l'infini $f^{-1}(0) \cap S_R^3$ (resp. $f'^{-1}(0) \cap S_R^3$) : c'est une condition suffisante car l'entrelacs irrégulier détermine les entrelacs réguliers à l'infini $f^{-1}(s) \cap S_R^3$ ($s \neq 0$), voir [NL₀₃¹⁹].

Deuxièmement nous pouvons calculer le développement de Puiseux des branches de f_1 (et de f_2) ainsi que les multiplicités d'intersection entre les branches de f_1 (et entre les branches de f_2) en prenant en compte la droite à l'infini d'équation locale ($z = 0$). C'est une condition suffisante car si nous connaissons la topologie de $z f_i$ alors nous pouvons retrouver la topologie de la famille $(f_i - tz^d)_{t \in \mathbb{C}P^1}$ (voir [LW₉₇¹⁹]) car $t = 0$ et $t = \infty$ sont les seules valeurs critiques de cette famille.

Nous utiliserons la seconde méthode : $f \approx f'$ si et seulement si f_1 et f'_1 (ainsi que f_2 et f'_2) ont des développements de Puiseux équivalents et les mêmes multiplicités d'intersection.

Détaillons les calculs pour le polynôme $f(x, y) = x\sigma \prod_{i=1}^n (x^p \sigma^q - \alpha_i)$ avec $\sigma(x, y) = x^s y + \ell(x) = x^s y + a_{s-1} x^{s-1} + \dots + a_0$, $a_0 \neq 0$ et $n > 1$, les calculs sont similaires

pour les autres polynômes. Alors $f'(x, y) = x\sigma' \prod_i (x^p \sigma'^q - i)$ et $\sigma'(x, y) = x^s y + 1$. L'équation locale de F en P_1 est

$$f_1(y, z) = (y + a_{s-1}z^2 + \dots + a_0z^{s+1}) \times \prod_i ((y + a_{s-1}z^2 + \dots + a_0z^{s+1})^q - \alpha_i z^{p+q(s+1)}).$$

Pour f'_1 la formule est similaire. Les branches de f_1 et f'_1 sont lisses et coupent la droite à l'infini ($z = 0$) transversalement. De plus les multiplicités d'intersection pour les branches de f_1 sont indépendantes des coefficients a_{s-1}, \dots, a_1 , de $a_0 \neq 0$, et des $\alpha_i \neq 0$: soit $\ell_1(y, z) = y + a_{s-1}z^2 + \dots + a_0z^{s+1}$ alors $\mathbf{m}_0(\ell_1(y, z), \ell_1^q(y, z) - \alpha_i z^{p+q(s+1)}) = p + q(s + 1)$ et pour $i \neq j$, $\mathbf{m}_0(\ell_1^q(y, z) - \alpha_j z^{p+q(s+1)}, \ell_1^q(y, z) - \alpha_i z^{p+q(s+1)}) = q(p + q(s + 1))$ (nous expliquons comment calculer les multiplicités d'intersection ci-dessous). Ainsi f_1 et f'_1 ont des développements de Puiseux équivalents et les mêmes multiplicités d'intersection.

Le lemme suivant nous permet de calculer les multiplicités d'intersection ; le premier point est bien connu (voir [BK₈₆¹⁹] ou [Di₉₂⁹]), le second point est une conséquence du premier.

Lemme 9.18. Soient f, g, f_1, f_2 des germes en 0 irréductibles de courbes planes.

– Soient K_f, K_g les entrelacs locaux de f et g . Alors les multiplicités d'intersection vérifient

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_0(f, g) &= \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x, y\} / (f(x, y), g(x, y)) \\ &= \text{lk}(K_f, K_g) = \text{val}_t(f \circ p(t)) \end{aligned}$$

avec lk le linking number, val est la valuation et $p(t) = (t^n, \varphi(t))$ est une paramétrisation de Puiseux de la courbe ($g = 0$) (qui dans ce cas ne doit pas contenir l'axe ($y = 0$)).

– Soient t, t' des nombres complexes avec $t \neq t'$ et $t' \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_0(f_1 f_2, g) &= \mathbf{m}_0(f_1, g) + \mathbf{m}_0(f_2, g), \\ \mathbf{m}_0(f + tg, f + t'g) &= \mathbf{m}_0(f, f + t'g). \end{aligned}$$

Pour le second point à l'infini P_2 , l'équation locale de F est

$$f_2(x, z) = x(x^s + a_{s-1}x^{s-1}z^2 + \dots + a_0z^{s+1}) \times \prod_i (x^p(x^s + a_{s-1}x^{s-1}z^2 + \dots + a_0z^{s+1})^q - \alpha_i z^{p+q(s+1)}).$$

Toutes les branches intersectent transversalement la droite à l'infini et la topologie de chaque branche est donnée par l'un des développements de Puiseux suivants :

$x = 0$, $x = z^{\frac{s+1}{s}}$ et $x = z^{\frac{p+q(s+1)}{p+qs}}$. Ils sont indépendants de a_{s-1}, \dots, a_1 , de $a_0 \neq 0$ et des $\alpha_i \neq 0$. De plus les multiplicités d'intersection sont aussi indépendantes des coefficients : soit $\ell_2(x, z) = x^s + a_{s-1}x^{s-1}z^2 + \dots + a_0z^{s+1}$ alors $\mathbf{m}_0(x, \ell_2(x, z)) = s+1$, $\mathbf{m}_0(x, x^p \ell_2(x, z)^q - \alpha_j z^{p+q(s+1)}) = p+q(s+1)$, $\mathbf{m}_0(\ell_2(x, z), x^p \ell_2(x, z)^q - \alpha_j z^{p+q(s+1)}) = s(p+q(s+1))$, et pour $i \neq j$, $\mathbf{m}_0(x^p \ell_2(x, z)^q - \alpha_i z^{p+q(s+1)}, x^p \ell_2(x, z)^q - \alpha_j z^{p+q(s+1)}) = (p+qs)(p+q(s+1))$.

En résumé f_1, f'_1 et f_2, f'_2 ont les mêmes branches et ces branches ont la même tangence entre elles donc f et f' sont topologiquement équivalents.

Finalement, nous allons prouver que la liste n'est pas redondante. Comme précédemment, nous ne détaillons les calculs que pour le polynôme $f(x, y) = x\sigma \prod_{i=1}^n (x^p \sigma^q - i)$ avec $\sigma = x^s y + 1$; pour les autres polynômes la méthode est la même. Supposons qu'un autre polynôme f' de la liste topologique vérifie $f \approx f'$. Alors f' est du même type que f , c'est-à-dire que $f'(x, y) = x\sigma' \prod_{i=1}^n (x^{p'} \sigma'^{q'} - i)$ avec $\sigma' = x^{s'} y + 1$. Comme $f \approx f'$, les localisations f_1 et f'_1 (*resp.* f_2 et f'_2) en P_1 (*resp.* P_2) ont des développements de Puiseux équivalents et les mêmes multiplicités d'intersection. Nous déduisons du calcul de ces multiplicités d'intersection en P_2 que $s+1 = s'+1$ et en P_1 que $p+q(s+1) = p'+q'(s'+1)$ et $q(p+q(s+1)) = q'(p'+q'(s'+1))$. Cela implique que $s = s'$, $p = p'$, $q = q'$ d'où $f = f'$. \square

Bibliographie

- [AM¹⁹₇₅] S. ABHYANKAR et T. MOH, Embedding of the line in the plane, *J. reine angew. Math.*, 276 (1975) 148-166.
- [A'C¹⁹₇₃] N. A'CAMPO, Sur la monodromie des singularités isolées d'hypersurfaces complexes, *Invent. Math.*, 20 (1973) 147-169.
- [Ar¹⁹₉₃] E. ARTAL-BARTOLO, Combinatoire et type topologique des applications polynomiales de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C} , *Enseign. Math.*, 39 (1993) 211-224.
- [Ar¹⁹₉₅] E. ARTAL-BARTOLO, Une démonstration géométrique du théorème d'Abhyankar-Moh, *J. reine angew. Math.*, 464 (1995) 97-108.
- [As¹⁹₉₆] A. ASSIS, Familles de courbes planes ayant une seule valeur irrégulière, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 322, Série I (1996) 1203-1207.
- [ACD¹⁹₉₈] E. ARTAL-BARTOLO, P. CASSOU-NOGUÈS et A. DIMCA, Sur la topologie des polynômes complexes, Singularities (Oberwolfach, 1996), *Progr. Math.*, 162, Birkhäuser, Basel (1998) 317-343.
- [BM²⁰₀₀] G. BAILLY-MAÎTRE, Monodromies des polynômes de deux variables complexes, *Thèse, Université de Bordeaux* (2000).
- [BF¹⁹₉₈] M. BOILEAU et L. FOURRIER, Knot theory and plane algebraic curves, Knot theory and its applications, *Chaos Solitons Fractals*, 9 (1998) 779-792.
- [BK¹⁹₈₆] E. BRIESKORN et H. KNÖRRER, Plane algebraic curves, Birkhäuser (1986).
- [Br¹⁹₈₈] S. BROUGHTON, On the topology of polynomial hypersurfaces, Singularities (Arcata, Calif., 1981) *Proc. Sympos. Pure Math.*, 40 (1983) 167-178.
- [De¹⁹₇₁] P. DELIGNE, Théorie de Hodge II, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 40 (1971) 5-57.

- [Di¹⁹₉₂] A. DIMCA, Singularities and topology of hypersurfaces, Universitext, Springer-Verlag (1992).
- [DN²⁰₀₀] A. DIMCA et A. NÉMÉTHI, On the monodromy of complex polynomials, *preprint* (2000).
- [DM¹⁹₉₂] P. DU BOIS et F. MICHEL, Filtration par le poids et monodromie entière, *Bull. Soc. math. France*, 120 (1992) 129-167.
- [Du¹⁹₈₃] A. DURFEE, Neighborhoods of algebraic sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 276 (1983) 517-530.
- [Du¹⁹₉₈] A. DURFEE, Five definitions of critical point at infinity, Singularities (Oberwolfach, 1996), *Progr. Math.*, 162, Birkhäuser, Basel (1998) 345-360.
- [EN¹⁹₈₅] D. EISENBUD et W. NEUMANN, Three-dimensional link theory and invariants of plane curve singularities, *Ann. of Math.*, Studies 110, Princeton University Press (1985).
- [Fo¹⁹₉₆] L. FOURRIER, Topologie d'un polynôme de deux variables complexes au voisinage de l'infini, *Ann. Inst. Fourier*, 46, 3 (1996) 645-687.
- [Fr¹⁹₉₉] S. FRIEDLAND, Monodromy, differential equations and the Jacobian conjecture, *Ann. Polon. Math.*, 72 (1999) 219-249.
- [Fu¹⁹₉₃] W. FULTON, Introduction to toric varieties, *Ann. of Math.*, Studies 131, Princeton University Press (1993).
- [GP¹⁹₉₉] J. GWOŹDZIEWICZ et A. PŁOSKI, On the singularities at infinity of plane algebraic curves, *preprint* (1999).
- [HL¹⁹₈₄] HÀ H.V. et LÊ D.T., Sur la topologie des polynômes complexes, *Acta Mathematica Vietnamica*, 9 (1984) 21-32.
- [Ka¹⁹₉₂] S. KALIMAN, Two remarks on polynomials in two variables, *Pacific J. Math.*, 154 (1992) 285-295.
- [Ka¹⁹₉₆] S. KALIMAN, Rational polynomials with a \mathbb{C}^* -fiber, *Pacific J. Math.*, 174 (1996) 141-194.
- [Ki¹⁹₉₂] F. KIRWAN, Complex algebraic curves, Cambridge University Press (1992).
- [LMW¹⁹₉₁] LÊ D.T., F. MICHEL et C. WEBER, Courbes polaires et topologie des courbes planes, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 24 (1991) 141-169.
- [LW¹⁹₉₄] LÊ D.T. et C. WEBER, A geometrical approach to the Jacobian conjecture for $n = 2$, *Kodai Math. J.*, 17 (1994) 374-381.
- [LW¹⁹₉₅] LÊ D.T. et C. WEBER, Polynômes à fibres rationnelles et conjecture jacobienne à 2 variables, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 320, Série I (1995) 581-584.

- [LW₉₇¹⁹] LÊ D. T. et C. WEBER, Équisingularité dans les pinceaux de germes de courbes planes et C^0 -suffisance, *Enseign. Math.*, 43 (1997) 355-380.
- [MW₀₀²⁰] F. MICHEL et C. WEBER, On the monodromies of a polynomial map from \mathbb{C}^2 to \mathbb{C} , à paraître dans *Topology*.
- [MS₈₀¹⁹] M. MIYANISHI et T. SUGIE, Generically rational polynomials, *Osaka J. Math.*, 17 (1980) 339-362.
- [Mi₆₈⁶⁸] J. MILNOR, Singular points of complex hypersurfaces, *Ann. of Math.*, Studies 61, Princeton University Press (1968).
- [Ne₈₉¹⁹] W. NEUMANN, Complex algebraic curves via their links at infinity, *Invent. Math.*, 98 (1989) 445-489.
- [NL₉₃¹⁹] W. NEUMANN et LÊ V.T., On irregular links at infinity of algebraic plane curves, *Math. Ann.*, 295 (1993) 239-244.
- [NN₀₀²⁰] W. NEUMANN et P. NORBURY, Vanishing cycles and monodromy of complex polynomials, *Duke Math. J.*, 101 (2000) 487-497.
- [NN₀₀²⁰'] W. NEUMANN et P. NORBURY, Unfolding polynomial maps at infinity, *Math. Ann.*, 318 (2000) 149-180.
- [NR₈₇¹⁹] W. NEUMANN et L. RUDOLPH, Unfoldings in knot theory, *Math. Ann.*, 278 (1987) 409-439, et Corrigendum : Unfoldings in knot theory, *Math. Ann.*, 282 (1988) 349-351.
- [NW₀₀²⁰] W. NEUMANN et P. WIGHTWICK, Algorithms for polynomials in two variables, *preprint* (2000).
- [NZ₉₂¹⁹] A. NÉMETHI et A. ZAHARIA, Milnor fibration at infinity, *Indag. Math. N. S.*, 3, 3, (1992) 323-335.
- [Ru₈₂¹⁹] L. RUDOLPH, Embeddings of the line in the plane, *J. reine angew. Math.*, 337 (1982) 113-118.
- [Su₇₄¹⁹] M. SUZUKI, Propriétés topologiques des polynômes de deux variables complexes, et automorphismes algébriques de l'espace \mathbb{C}^2 , *J. Math. Soc. Japan*, 26 (1974) 241-257.
- [Wi₀₀²⁰] P. WIGHTWICK, Equivalence of polynomials under automorphisms of \mathbb{C}^2 , *preprint* (2000).
- [Za₈₅¹⁹] M. ZAĬDENBERG, Rational actions of the group \mathbb{C}^* on \mathbb{C}^2 , their quasi-invariants, and algebraic curves in \mathbb{C}^2 with Euler characteristic 1, *Sov. Math. Dokl.*, 31 (1985) 57-60.
- [ZL₈₃¹⁹] M. ZAĬDENBERG et V. YA. LIN, An irreducible, simply connected algebraic curve in \mathbb{C}^2 is equivalent to a quasihomogeneous curve, *Sov. Math. Dokl.*, 28 (1983) 200-204.